

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A PROPAGAÇÃO DE
ONDAS GRAVITACIONAIS NÃO LINEARES

Newton Jorge Munareto Zambrozuski

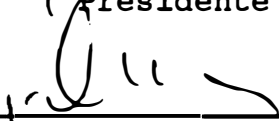
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por :

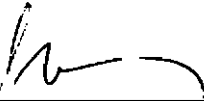


Prof WEBER JOÃO MANSUR, Ph. D.

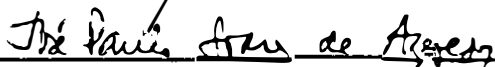
(Presidente)



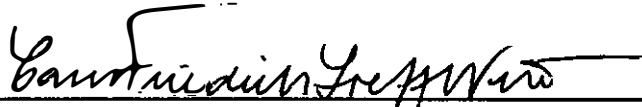
Prof JOSÉ CLAUDIO DE FARIA TELLES, Ph. D.



Prof SÉRGIO HAMILTON SPHAIER, Dr.Ing.



Prof JOSÉ PAULO SOARES DE AZEVEDO, Ph. D.



Prof CARLOS FRIEDRICH LOEFFLER NETO, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 1992

ZAMBROZUSKI, NEWTON JORGE MUNARETO

Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Propagação de Ondas Gravitacionais Não Lineares. [Rio de Janeiro] 1992 .

xiii, 176 p. 29,7 cm (COPPE / UFRJ, M Sc,

Engenharia Civil / Recursos Hídricos, 1992)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Métodos Numéricos 2. Mecânica dos Fluidos 3. Fronteiras Móveis

I. COPPE / UFRJ II. Título (série).

ÍNDICE

RESUMO

ABSTRACT

DEDICAÇÃO

AGRADECIMENTOS

NOTAÇÃO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Introdução.....1

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

2.1 Introdução.....5

2.2 Teorema da Divergência.....6

2.3 Derivada Direcional.....8

2.4 Identidades de Green.....9

2.5 Equação de Laplace.....10

2.6 Sentença de Resíduos Ponderados para a
Equação de Laplace.....12

2.7 Equação Integral de Contorno para a Equação
de Laplace e para Pontos do Contorno.....17

2.8 Discretização com Elementos Isoparamétricos
Quadráticos.....21

2.9 Integração Numérica (ou Quadratura) Gaussiana..36

2.10 Correção do Nó Central.....44

2.11 Derivada Tangencial.....47

2.12 Rebatimento do Ponto Fonte sobre o Fundo.....50

2.13 Equilíbrio de Velocidade.....52

3 AVANÇO NO TEMPO

3.1 Introdução.....54

3.2 Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem.....54

3.3 Variação do Passo no Tempo.....62

4	ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS	
4.1	Introdução.....	64
4.2	Equação de Bernoulli.....	65
4.3	Equação de Laplace.....	69
4.4	Condições de Contorno do Escoamento de Fluido....	69
4.4.1	Condições de Contorno Cinemáticas.....	69
4.4.2	Condições de Contorno Dinâmicas.....	70
4.5	Energia Pontencial.....	71
4.6	Energia Cinética.....	72
4.7	Energia Total.....	74
4.8	Nível Médio da Água.....	74
5	ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS DE ONDAS GRAVITACIONAIS	
5.1	Introdução.....	75
5.2	Onda Linear.....	76
5.3	Ondas Progressivas.....	78
5.4	Ondas em Águas Intermediárias.....	80
5.5	Ondas em Águas Profundas.....	80
5.6	Ondas em Águas Rasas.....	82
5.7	Ondas Não Lineares.....	83
6	ASPECTOS COMPUTACIONAIS	
6.1	Introdução.....	85
6.2	Linguagem de Programação.....	85
6.3	Ambiente de Programação.....	85
6.4	Equipamento Utilizado.....	85
6.5	Programação Estruturada.....	86
6.6	Recursos Gráficos	86
6.7	Tempo de Processamento.....	87
6.8	Entrada e Saída de Dados.....	87
6.9	Controle de Recursos Matemáticos.....	87

7	APLICAÇÃO	
7.1	Introdução.....	89
7.2	Problemas de Valor de Contorno Solucionados pelo Método dos Elementos de Contorno.....	89
7.3	Propagação de uma Onda Linear.....	127
7.4	Propagação de Ondas Não Lineares.....	136
7.4.1	Onda Levemente Não Linear.....	137
7.4.2	Onda Medianamente Não Linear.....	140
7.4.3	Onda Altamente Não Linear.....	147
7.4.4	Onda Rebentando.....	155
8	CONCLUSÕES.....	167
9	APÊNDICES	
9.1	APÊNDICE "A" - Valor Principal de Cauchy.....	169
9.2	APÊNDICE "B" - Potencial de Velocidades e Velocidade em Pontos Internos.....	172
10	BIBLIOGRAFIA.....	174

RESUMO

Resumo da Tese apresentada a COPPE / UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A PROPAGAÇÃO DE
ONDAS GRAVITACIONAIS NÃO LINEARES

Newton Jorge Munareto Zambrozuski

MARÇO , 1992

Orientador : Prof Webe João Mansur

Programa : Engenharia Civil / Área de Recursos Hídricos

Este trabalho desenvolve o Método dos Elementos de Contorno (MEC) em um espaço físico bidimensional para aplicação em problemas de fronteiras fixas ou móveis. A discretização da fronteira é feita com elementos isoparamétricos quadráticos.

No MEC foram utilizados os procedimentos já conhecidos como : transformação cúbica de terceira ordem de Telles [1], equilíbrio de velocidade de Fernando de Paula [15], tratamento de descontinuidade de velocidade por elementos com colocação não nodal, rebatimento do ponto fonte e periodicidade para ondas. E foram desenvolvidos os procedimentos de integração em dois trechos e centralização do nó do meio do elemento.

No caso de fronteiras fixas os procedimentos desenvolvidos aplicam-se a escoamento em rios, reservatórios e condutos abertos.

No caso de fronteiras móveis pode-se estudar a formação de ondas lineares e não-lineares, como também acompanhar a rebentação de uma onda gravitacional não-linear.

O avanço no tempo é obtido com o uso do Método de Runge - Kutta de Quarta Ordem.

É utilizada a formulação Lagrangeana para atualizar as posições das partículas da fronteira em cada nível de tempo.

É utilizada a formulação Euleriana para o problema de valor de contorno em cada nível de tempo, sendo que a solução do MEC fornece a velocidade normal e o potencial de velocidades em cada nó da fronteira.

Os resultados dos principais problemas abordados foram expostos e comparados com soluções teóricas, quando possível.

ABSTRACT

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

BOUNDARY ELEMENT METHOD APLIED TO PROGRESSIVE NONLINEAR
GRAVITY WAVES

Newton Jorge Munareto Zambrozuski

March , 92

Thesis Supervisor: Webe João Mansur

Department: Civil Engineering

This work presents a boundary element method formulation in two-dimensions, to be applied either to moving boundary problems, or to problems with non moving boundaries. Isoparametric quadratic elements have been implemented to discretize the boudary.

The procedure developed for non moving boundary problems can be applied to study the hidraulic flow in rivers, reservoir and channels (open or not open).

The procedure developed for moving boundary problems can be applied to simulate non-linear gravitational waves, wave makers and sloshing.

A Lagrangean formulation is employed to update the boudary fluid particles at each time step.

An Eulerian formulation is employed to solve the boundary value problem at each time step. Velocity potencial and normal velocities at boundary nodes, at each time are obtained by the boundary element method.

The time marching process is carried out through the fourth order Runge-Kutta method.

A summarized discussion concerning the numerical results of the most important problems studied is presented, including comparisons with analytical solutions whenever possible.

DEDICAÇÃO

Durante meus 2 anos de mestrado só respirei aula, estudo, pesquisa e computador. Este foi o prazo dado pelo Exército para a conclusão do meu Curso e êle foi cumprido. Neste período, só a saúde própria ou familiar falou mais alto.

Dedico este trabalho àquelas pessoas queridas, amigos ou parentes, que mereciam muito, muito mais tempo e atenção de minha parte, mas não receberam.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a DEUS e a todas as pessoas que de alguma forma fizeram de mim um instrumento desta humilde obra.

Houve Pessoas e Organizações as quais não posso deixar de citar por sua importância nestes dois anos de trabalho.

APOLÔNIO e REACILVA, meus pais, por terem incentivado meus estudos sempre.

DEZIRÉ, minha esposa, ALEXANDRE e LUANA, meus filhos, por terem dado a mim seu amor e carinho.

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA, Órgão do MINISTÉRIO DO EXÉRCITO, sob o comando do General de Brigada ÁLVARO AUGUSTO ALVES PINTO, confiou na minha capacidade de trabalho e deu suporte econômico ao meu estudo, em tempo integral.

COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA da UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO (COPPE) por seu apoio geral ao meu Curso.

Equipe da ÁREA DE RECURSOS HÍDRICOS da COPPE por seu apoio específico ao meu aprendizado.

Meus professores na obtenção dos créditos para entrada em tese, os quais sempre terei como exemplo a serem seguidos na prática da cátedra: Prof WEBE JOAO MANSUR, Prof JOÃO SÉRGIO FAJARDO ROLDÃO, Prof PAULO CANEDO DE MAGALHÃES , Prof JERSON KELMAN, Prof RUI CARLOS VIEIRA DA SILVA, Prof FLAVIO CEZAR BORBA MASCARENHAS.

Prof SÉRGIO HAMILTON SPHAIER pelas suas aulas e subsídios sobre o assunto "Ondas".

Engenheiro Pós-graduado JORGE PRODANOFF, meu colega em Recursos Hídricos, por sua colaboração espontânea no início desta tese, por orientações de estudo básicas e pela cessão de documentos que abreviaram o término de minhas

pesquisas.

Colegas que trabalham na Área de Recursos Hídricos, mais experientes e que muito contribuíram principalmente no início do meu Curso: Engenheiros OTTO CORREA ROTUNO FILHO, ANA PAULA SIMÕES, LUCIENE PIMENTEL DA SILVA, MARIA HELENA e FERNANDA .

Professor CARLOS FRIEDRICH LOEFFLER, do IME, pelas aulas e subsídios sobre o assunto " Método dos Elementos de Contorno ".

Meus colegas de aula, durante a fase de obtenção de créditos, junto aos quais passei horas de dificuldades e de sã camaradagem, nunca os esquecerei e os terei com orgulho no meu coração: FERNANDO, MARIAZINHA, LÍGIA, MARCELO MIGUEZ, ALEXANDRE, MARIA LUÍZA E MARIA HELENA.

Prof JOSÉ PAULO SOARES DE AZEVEDO, por suas preciosas orientações, ao ter retornado, ao final de 1991, do curso de Doutorado do Instituto de Mecânica Computacional, Southampton, Inglaterra .

Prof WEBE JOÃO MANSUR, principal responsável pelo desenvolvimento deste assunto, pelas intuições na resolução dos problemas que apareceram e pela vibração e motivação que me transmitiu durante este período. O Prof WEBE, com suas qualidades inigualáveis tanto no campo científico como no pessoal, foi muito mais do que um orientador acadêmico, foi um colega de trabalho, foi um amigo.

NOTAÇÃO

\bar{a}	valor analítico da função " a "
\underline{a}	vetor ou matriz " a "
a	semiamplitude da onda linear = $H/2$
c	celeridade da onda ou velocidade da onda = $W/k = \lambda/\tau$
d	profundidade d'água (medida entre o fundo e o nível médio da superfície)
e	exponencial
f	força
F	número de Froude = $\frac{c}{\sqrt{g \cdot d}}$
H	amplitude da onda
g	aceleração da gravidade
\underline{i}	vetor unitário na direção X
\underline{j}	vetor unitário na direção Y
\underline{k}	vetor unitário na direção Z
J_1	= $ J_{\Gamma/\eta}(\eta_1) _e$ = Jacobiano da transformação de coordenada " Γ " para " η " em " η_1 " no elemento "e"
J_2	= $ J_{\eta/\gamma}(\gamma_1) _e$ = Jacobiano da transformação de coordenada " η " para " γ " em " γ_1 " no elemento "e"
J_3	= $ J_{\gamma/\alpha}(\alpha_1) _e$ = Jacobiano da transformação de coordenada " γ " para " α " em " α_1 " no elemento "e"
J_4	= $ J_{\gamma/\beta}(\beta_1) _e$ = Jacobiano da transformação de coordenada " γ " para " β " em " β_1 " no elemento "e"
m	massa
\underline{n}	vetor unitário normal ao contorno apontando para fora do domínio
N_i	Função de forma de índice "i"
p	velocidade normal ao contorno
p_x	velocidade na direção X
p_z	velocidade na direção Z
r	segmento de reta ligando o ponto fonte " ξ " com o ponto campo "w"
r_u	vetor unitário de "r"

t	tempo
u	potencial de velocidades
v_x	velocidade na direção X
v_z	velocidade na direção Z
w	ponto campo
ξ	ponto fonte
W	frequência angular = $2 \pi / \tau$
x	coordenada Cartesiana horizontal
z	coordenada Cartesiana vertical
ζ	cota da superfície livre em relação ao nível médio da água
η	coordenada natural, $\eta \in [-1 ; +1]$
γ	peso específico
Γ	contorno do domínio
λ	comprimento de onda
μ	viscosidade dinâmica (absoluta)
ρ	massa específica
$\sum_{i=1}^3 k_i$	somatório dos termos $k_i = k_1 + k_2 + k_3$
τ	período da onda
θ	ângulo de fase = $k.x - W.t$
π	razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro $\approx 3,141592654... = 4 \arctan(1,0)$
Ω	domínio da função em estudo
∇	operador nabla = $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ em duas dimensões
∇^2	Operador Laplaciano = $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ em coordenadas Cartesianas e em duas dimensões
∂	derivada parcial
\circ	produto escalar
\times	produto vetorial
\int	integral

1. INTRODUÇÃO

1.1 Introdução

O homem para construir com segurança e economia precisa antes planejar com perfeição a obra de modo que esta atenda às leis da natureza, tenha uma forma equilibrada, resista aos esforços permanentes e temporários e que opere satisfazendo as finalidades desejadas.

Para obras não convencionais de pequena envergadura a tentativa e erro, mesmo não devendo ser utilizada, normalmente não traz grandes danos àquele que constrói, financia ou usa. Porém, para grandes obras, esse método deve ser transferido à simulações experimentais miniaturizadas e/ou computadorizadas.

Nas Áreas de Engenharia Civil, Engenharia Oceânica e outras Ciências que tratam com a água, as simulações computadorizadas baseadas nas leis físicas, químicas, matemáticas e os cada vez melhores recursos computacionais, estão cada vez mais oferecendo resultados confiáveis aos profissionais desta área, podendo já, em muitos casos, substituir a simulação experimental miniaturizada ou no mínimo oferecer um leque de opções possíveis.

Em Recursos Hídricos, o escoamento da água, em um grande número de problemas, pode ser representado pela simples aplicação da Equação de Laplace ao domínio em estudo. O Método dos Elementos de Contorno (MEC), uma ferramenta do Cálculo Numérico, ainda que de certa forma desenvolvido, suporta muitos aperfeiçoamentos. Este Método é de muita utilidade na solução numérica da Equação de Laplace.

A pesquisa desenvolvida e que culmina com a apresentação desta Tese baseou-se no aperfeiçoamento desta ferramenta matemática (MEC) e de sua aplicabilidade à Equação de Laplace.

Como a maioria das pesquisas esta tem um suporte anterior que podemos colocar como marco 1976, ano em que Longuet-Higgins e Cokelet publicaram um trabalho pioneiro [13] na análise da rebentação de ondas bidimensionais. Para isso utilizaram uma formulação mista Euleriana Lagrangeana e o Método das Equações Integrais que veio a dar origem ao

MEC. Para isso realizaram uma transformação de coordenadas conhecida como " transformação conforme " que hoje em dia está sendo abandonada.

Em 1981, Vinje e Brevig [16] modificaram a abordagem de Longuet-Higgins e Cokelet [13], obtendo a solução da Equação de Laplace através de solução numérica no espaço físico (sem mudança de domínio), a partir da equação integral obtida pela aplicação do teorema de Cauchy para as funções potencial de velocidades complexas. A Equação de Laplace foi resolvida tanto para o potencial de velocidades (u) quanto para a velocidade normal (p), o que permite calcular o campo de velocidades e acelerações em " x " e " z ". A solução das equações integrais foi obtida via método dos resíduos ponderados e o avanço no tempo foi feito pelo método de Hamming de Quarta Ordem, inicializado com o esquema de Runge-Kutta.

Em 1984, Dold e Peregrine [18] partiram para a solução da Equação de Laplace em um domínio conforme, através do teorema integral de Cauchy, que permitiu um tratamento mais simples das singularidades, por meio de procedimentos iterativos convergentes, em vez de usar a função de Green, que demanda procedimentos mais demorados de solução. A grande modificação, no entanto, foi no algoritmo de avanço no tempo pois ao invés dos esquemas até então empregados, foi utilizada uma série de Taylor truncada, onde os termos das ordens sucessivas eram obtidos por meio da solução das equações integrais montadas a partir das sucessivas derivações no tempo. Os autores afirmam que quase não houve necessidade de suavização.

Em 1986, Jansen [17] simulou ondas rebentando no plano físico com o uso de elementos de contorno lineares e com o avanço no tempo pelo Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem. Os testes de precisão foram feitos por meio da verificação da conservação da energia e do equilíbrio de velocidade.

Em 1988, Grilli et al [14] apresentaram uma formulação de elementos de contorno usando o mesmo método de passo no tempo que Dold e Peregrine [18] e elementos de contorno cúbicos, com elementos ajustáveis para melhorar a precisão

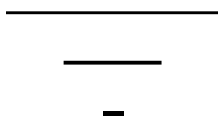
das velocidades tangenciais.

Em outubro de 1991, Azevedo [4] adotou elementos de contorno quadráticos isoparamétricos usando uma formulação integral baseada na terceira identidade de Green para a solução do problema de valor de contorno e o método de Runge-Kutta de Quarta Ordem para atualizar a geometria da superfície livre e o potencial de velocidades entre dois níveis de tempo. Ele diz ter escolhido o MEC convencional no espaço físico bidimensional, não obstante a popularidade e eficiência da formulação do teorema de Cauchy, porque assim pode estender suas análises a três dimensões sem dificuldades. Justificou sua opção pelo método de Runge-Kutta de Quarta Ordem devido sua alta precisão, simplicidade de implementação computacional e a possibilidade de variação do passo no tempo.

Agora, março de 1992, este trabalho apresenta, como em [4], elementos de contorno quadráticos isoparamétricos, com uma formulação integral baseada na segunda identidade de Green (que essencialmente é igual a terceira) para a solução do problema de valor de contorno. Também foi usado o método de Runge-Kutta de Quarta Ordem para atualizar a geometria da superfície livre e o potencial de velocidades entre dois níveis de tempo. Foi usado o espaço físico bidimensional, o que permite com pequenas implementações montar um tanque gerador de ondas. Como em [4] este trabalho não inclui esquemas de suavização. A integração, como é um elemento muito importante na solução numérica, recebeu vários melhoramentos : transformação de coordenadas de terceiro grau, escolha do número adequado de pontos de integração, correção do nó central (com um procedimento diferente de [4]), colocação não nodal do ponto fonte e rebatimento do ponto fonte sobre o fundo. Na montagem do sistema de equações foi forçado o equilíbrio de velocidade e pode ser usado a condição de periodicidade da onda .

Este trabalho inicia no capítulo 2 com uma exposição teórica do Método dos Elementos de Contorno aplicado à Equação de Laplace e os procedimentos utilizados para obter uma boa performance. No capítulo 3 foi apresentada a maneira

como foi implementado o método de Runge-Kutta Quarta Ordem na programação. A seguir, nos capítulos 4 e 5 são vistos alguns conceitos básicos de mecânica dos fluidos e alguns conceitos básicos de ondas gravitacionais que serviram de base à programação desenvolvida. Para se ter uma idéia dos recursos e possibilidades da programação foram apresentados no capítulo 6 os aspectos computacionais. Para mostrar os resultados alcançados foi editado o capítulo 7 com as aplicações de maior relevância . Finalmente o capítulo 8 dá a conclusão deste trabalho. Para auxiliar o texto principal foram incluídos dois apêndices ao capítulo 9 e a bibliografia no capítulo 10.



2.MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

2.1 Introdução

Neste capítulo serão vistos os procedimentos básicos do Método dos Elementos de Contorno para resolver a equação de LAPLACE, baseados na referência [19].

Inicia-se o capítulo 2 pela revisão sucinta do Teorema da Divergência e do conceito de Derivada Direcional para chegar-se as primeira e segunda Identidades de Green.

Vê-se, a seguir, o estabelecimento de uma sentença de resíduos ponderados para a Equação de Laplace e a escolha de uma função de ponderação adequada.

Após é apresentada a dedução da equação integral para pontos fontes pertencentes ao contorno. Esta será a equação básica para a análise numérica de problemas governados pela Equação de Laplace, via o Método dos Elementos de Contorno.

Depois são apresentados os Elementos Quadráticos Isoparamétricos para discretização da geometria, do potencial de velocidades e da velocidade normal ao contorno. É visto como se monta o sistema de equações algébricas para se obter a solução do sistema.

Para obter-se os coeficientes da matriz do sistema é necessário uma boa integração numérica. O método de Gauss foi o escolhido. Concomitante com este foram usados os seguintes procedimentos que permitem obter melhores resultados:

- A escolha de um número adequado de pontos de integração ;
- A pesquisa do ponto no elemento que seja mais próximo do ponto de colocação ;
- A integração em dois trechos ;
- A transformação cúbica de coordenadas (Telles [1]), no elemento singular, para concentrar os pontos de integração na região do elemento mais próxima ao ponto de colocação . Este é o mais eficiente procedimento .

Dependendo das condições geométricas iniciais ou intermediárias do problema faz-se necessário corrigir o nó do interior do elemento, localizando-o sempre no centro,

para obter-se uma melhor solução.

Para resolver problemas transientes é necessário calcular a derivada tangencial dos nós do contorno. Isto é visto na seção 2.11 .

A seguir é esplanado o rebatimento do ponto fonte sobre o fundo (referência [6]), procedimento este adequado quando o fundo é impermeável, no problema de propagação de uma onda gravitacional, e não se deseja discretizá-lo .

Após a montagem do sistema de equações algébricas lineares, a qual fornece uma matriz cheia e não simétrica, é possível resolver o sistema pelo método mais conveniente. O que foi usado neste trabalho, mas que não sofreu comentários por ser um método muito conhecido, foi o de Gauss-Jordan com a rotina de colocação do elemento de maior valor absoluto na diagonal principal.

Obtido o potencial de velocidades e a velocidade normal no contorno, pode-se obtê-los também no interior do domínio através dos procedimentos comentados no Apêndice B .

2.2 Teorema da Divergência

Seja uma região fechada " Ω " no plano " XZ " cujo contorno " Γ " é seccionalmente contínuo conforme mostrado na figura (2.1). O vetor unitário " \underline{n} " indicado nesta figura,

$$\underline{n} = n_x \underline{i} + n_z \underline{k} \quad (2.1)$$

é normal a " Γ " e aponta para a região exterior a " Ω " (" \underline{i} " e " \underline{k} " são vetores unitários apontando respectivamente na direção positiva dos eixos " X " e " Z ").

Seja uma função vetorial " $\underline{p}(w)$ " , com primeiras derivadas parciais contínuas

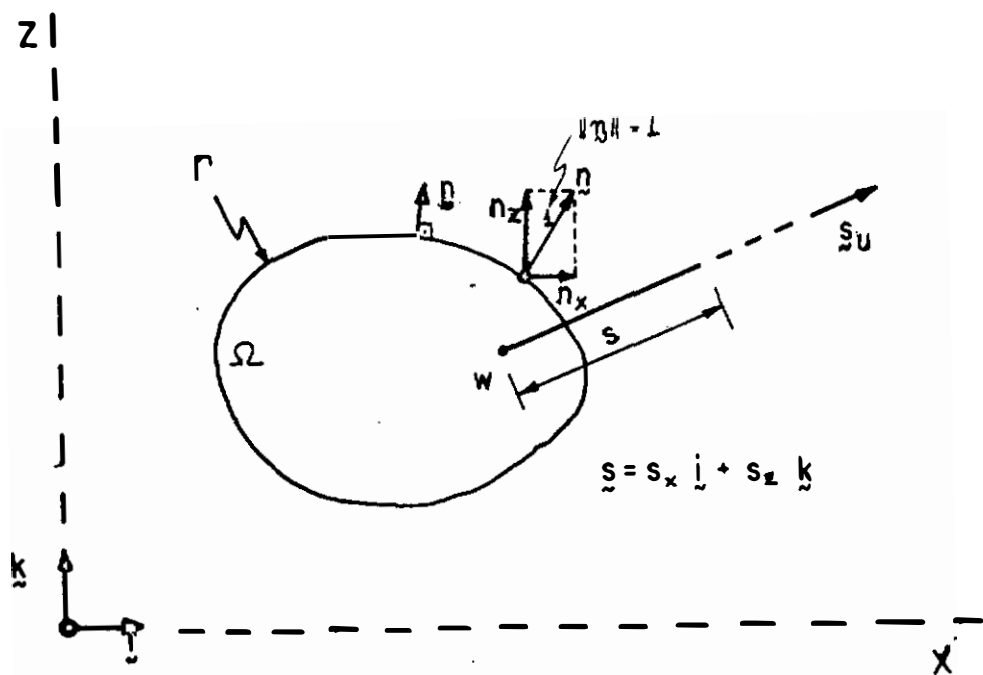


Figura 2.1 - Região no espaço bidimensional

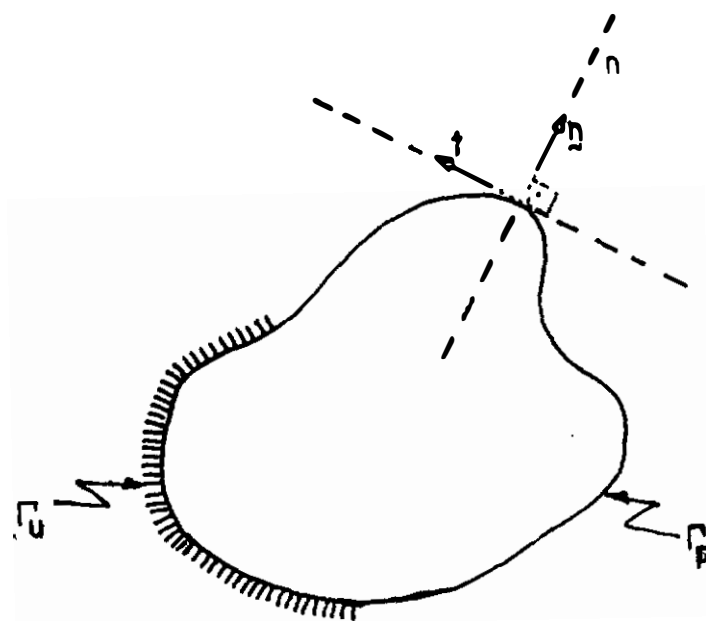


Figura 2.2 - Condições de Contorno Essenciais e Naturais para a

sendo " w " um ponto definido cujo vetor posição " \underline{w} " é dado por,

$$\underline{w} = x \underline{i} + z \underline{k} \quad (2.3)$$

Para a região fechada " Ω " indicada na figura (2.1), o Teorema da Divergência pode ser escrito como :

$$\int_{\Omega} \text{div } \underline{p} \, d\Omega = \int_{\Gamma} p_n \, d\Gamma \quad (2.4)$$

sendo

$$\text{div } \underline{p} = \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_z}{\partial z} \quad (2.5)$$

e " p_n " a componente da projeção do vetor " \underline{p} " na direção " \underline{n} " , ou seja

$$p_n = \underline{p} \cdot \underline{n} = p_x n_x + p_z n_z \quad (2.6)$$

Em forma expandida, o Teorema da Divergência pode ser escrito como :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_z}{\partial z} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(p_x n_x + p_z n_z \right) d\Gamma \quad (2.7)$$

2.3 Derivada Direcional

A derivada de uma função escalar " $u(w)$ " em um ponto " w ", com relação à coordenada " s " na direção de um vetor unitário " \underline{s} " é dada por (ver figura 2.1) :

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \underline{\nabla} u \cdot \underline{s} \quad (2.8)$$

sendo " ∇u " o vetor gradiente, isto é

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial u}{\partial z} \underline{k} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.9)$$

Sendo " s_x " e " s_z " os cossenos diretores do vetor unitário " \underline{s} ",

$$\underline{s} = (s_x, s_z) = \left(\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial z} \right) \quad (2.10)$$

a expressão (2.8) pode ser escrita como :

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} s_x + \frac{\partial u}{\partial z} s_z \quad (2.11)$$

2.4 Identidades de Green

As Identidades de Green são equações integrais que relacionam duas funções escalares " $u(w)$ " e " $u^*(w)$ " definidas em um domínio " Ω ", cujas segundas derivadas parciais são contínuas.

O Teorema da Divergência permite escrever a seguinte igualdade :

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} u^* \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} u^* \right) \right] d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial z} n_z \right) u^* d\Gamma \quad (2.12)$$

A partir do conceito de derivada de um produto de duas funções a integral do primeiro termo da expressão (2.12) fica

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} u^* \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} u^* \right) \right] d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) u^* + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u^*}{\partial z} \right) \right] d\Omega \quad (2.13) \end{aligned}$$

Considerando-se que a derivada direcional de " u " é dada por :

$$p = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial z} n_z \quad (2.14)$$

e partindo-se da equação (2.12) obtém-se a PRIMEIRA IDENTIDADE DE GREEN :

$$\int_{\Omega} u^* (\nabla^2 u) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u^*}{\partial z} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} p u^* d\Gamma \quad (2.15)$$

A PRIMEIRA IDENTIDADE DE GREEN também pode ser escrita da seguinte forma :

$$\int_{\Omega} u (\nabla^2 u^*) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u^*}{\partial z} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma \quad (2.16)$$

onde

$$p^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} \quad (2.17)$$

Subtraindo-se da equação (2.15) a equação (2.16) obtém-se a SEGUNDA IDENTIDADE DE GREEN :

$$\int_{\Omega} \left[(\nabla^2 u) u^* - u (\nabla^2 u^*) \right] d\Omega = \int_{\Gamma} (u^* p - p^* u) d\Gamma \quad (2.18)$$

2.5 Equação de Laplace

A distribuição do potencial de velocidades em um domínio " Ω " é governada pela Equação de Laplace (Figura 2.2),

$$\nabla^2 u(w) = 0 \quad (2.19)$$

a qual rege um sem número de fenômenos nas mais diversas Áreas de Engenharia. Especificamente, neste trabalho, será vista sua aplicação na simulação de uma onda gravitacional não linear.

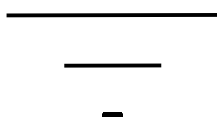
As condições de contorno associadas à equação (2.19), estudadas nesta seção são as seguintes (ver figura 2.2) :

Condições de Contorno Essenciais

$$u(w) = \bar{u}(w) , \text{ ponto } "w" \in \Gamma_u \quad (2.20)$$

Condições de Contorno Naturais

$$p(w) = \bar{p}(w) , \text{ ponto } "w" \in \Gamma_p \quad (2.21)$$



2.6 Sentença de Resíduos Ponderados para a Equação de Laplace

As soluções da Equação de Laplace obtidas através de métodos aproximados não atendem exatamente (exceto em problemas bastante simples) nem à equação (2.19) nem às condições de contorno indicadas nas expressões (2.20) e (2.21). Em face disto, pode-se definir os seguintes resíduos, os quais quantificam o quanto a solução aproximada se afasta da solução analítica do problema :

$$\begin{aligned} R_{\Omega}(w) &= \nabla^2 u(w) , & w \in \Omega \\ R_u(w) &= u(w) - \bar{u}(w) , & w \in \Gamma_u \\ R_p(w) &= p(w) - \bar{p}(w) , & w \in \Gamma_p \end{aligned} \quad (2.22)$$

A partir das equações (2.22) pode-se estabelecer uma sentença de resíduos ponderados de onde podem ser derivados métodos aproximados bastante conhecidos como o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Nestes métodos, e de uma forma geral nos métodos de resíduos ponderados, as soluções aproximadas têm a seguinte forma :

$$u(w) = \sum_{i=1}^I \alpha_i \phi_i(w) \quad (2.23)$$

sendo " $\phi_i(w)$ " um conjunto de funções linearmente independentes, e " α_i " incógnitas a serem determinadas.

As " I " equações necessárias para obtenção das " I " incógnitas " α_i " são estabelecidas a partir da seguinte SENTENÇA DE RESÍDUOS PONDERADOS :

$$\int_{\Omega} R_{\Omega}(w) W_1(w) d\Omega(w) + \int_{\Gamma_p} R_p(w) \bar{W}_1(w) d\Gamma_p(w) + \\ + \int_{\Gamma_u} R_u(w) \bar{\bar{W}}_1(w) d\Gamma_u(w) = 0 \quad (2.24)$$

onde $W_1(w)$, $\bar{W}_1(w)$ e $\bar{\bar{W}}_1(w)$ são funções de ponderação pertencentes a famílias previamente selecionadas.

No Método dos Elementos de Contorno, as funções de ponderação adotadas são :

$$W_1(w) = u^*(\xi_1; w) \quad w \in \Omega \\ \bar{W}_1(w) = -u^*(\xi_1; w) \quad w \in \Gamma_p \quad (2.25) \\ \bar{\bar{W}}_1(w) = p^*(\xi_1; w) \quad w \in \Gamma_u$$

Substituindo as funções de (2.22) e (2.25) em (2.24) a sentença de resíduos ponderados para a equação de Laplace fica :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u u^* d\Omega = \int_{\Gamma_p} (p - \bar{p}) u^* d\Gamma_p - \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) p^* d\Gamma_u \quad (2.26)$$

Tendo em vista a SEGUNDA IDENTIDADE DE GREEN, abaixo indicada

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u u^* d\Omega = \int_{\Omega} u (\nabla^2 u^*) d\Omega + \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma \quad (2.27)$$

e que

$$\int_{\Gamma} u^* p d\Gamma - \int_{\Gamma_p} u^* p d\Gamma_p = \int_{\Gamma_u} u^* p d\Gamma_u \quad (2.28)$$

$$\int_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} p^* u \, d\Gamma_u = \int_{\Gamma_p} p^* u \, d\Gamma_p \quad (2.29)$$

e fazendo a seguinte consideração

$$\int_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma = \int_{\Gamma_p} p^* u \, d\Gamma_p + \int_{\Gamma_u} p^* \bar{u} \, d\Gamma_u \quad (2.30)$$

$$\int_{\Gamma} u^* p \, d\Gamma = \int_{\Gamma_p} u^* \bar{p} \, d\Gamma_p + \int_{\Gamma_u} u^* p \, d\Gamma_u \quad (2.31)$$

pode-se escrever a equação (2.26) como indicado abaixo

$$\int_{\Omega} u (\nabla^2 u^*) d\Omega = \int_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* p \, d\Gamma \quad (2.32)$$

Se for adotada uma função de ponderação " u^* " que obedeça " $\nabla^2 u^* = 0$ " em " Ω " , a equação (2.32) fornece

$$\int_{\Gamma} p^* u \, d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* p \, d\Gamma = 0 \quad (2.33)$$

que é o ponto de partida para a dedução das equações integrais básicas do Método dos Elementos de Contorno para a Equação de Laplace.

A função " u^* " que obedeça " $\nabla^2 u^* = 0$ " é chamada de SOLUÇÃO FUNDAMENTAL (se $\xi \notin \Omega$) e no espaço " Ω " bidimensional é dada por

$$u^*(\xi; w) = - \frac{1}{2\pi} \ln(r) + D \quad (2.34)$$

sendo " D " uma constante real arbitrária (se $D \neq 0$ pode-se forçar o equilíbrio de velocidade) e " r " a distância entre os pontos " w " e " ξ ", (ver figura 2.3) :

$$r = | \underline{r} | = | \underline{w} - \underline{\xi} | \quad (2.35)$$

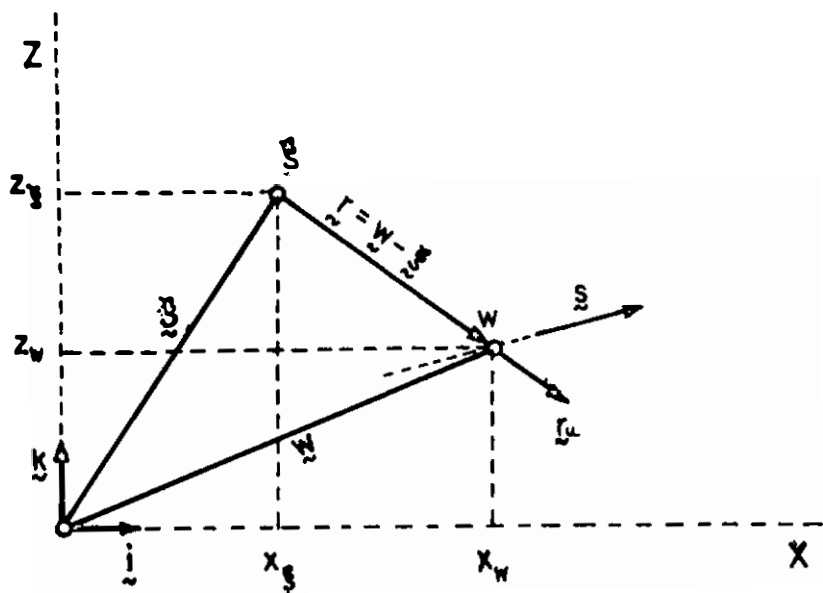
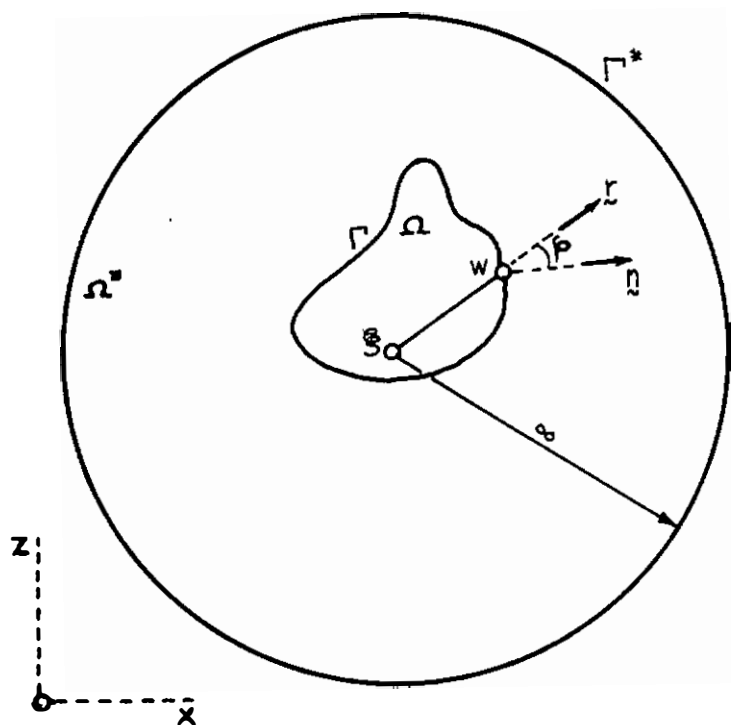


Figura 2.3 - Vetores " $r = w - \xi$ ", unitário " r_u " e vetor " s " em uma direção qualquer.



$$\underline{r} = r_x \underline{i} + r_z \underline{k} = \left(x_w - x_\xi \right) \underline{i} + \left(z_w - z_\xi \right) \underline{k} \quad (2.36)$$

sendo " w " o vetor posição do ponto " w " e " ξ " o vetor posição do ponto " ξ ",

$$\underline{\xi} = x_\xi \underline{i} + z_\xi \underline{k} \quad (2.37)$$

Conseqüentemente :

$$r = \sqrt{ \left| x_w - x_\xi \right|^2 + \left| z_w - z_\xi \right|^2 } \quad (2.38)$$

A VELOCIDADE FUNDAMENTAL

$$p_s^* = \frac{\partial u^*}{\partial s} \text{ em " } w \text{ " na direção " } s \text{ "}$$

pode ser obtido através da expressão

$$p_s^* (\xi ; w) = \underline{\nabla} u^* \circ \underline{s} = \left(\frac{\partial u^*}{\partial r} \underline{\nabla} r \right) \circ \underline{s} \quad (2.39)$$

pois " u^* " é função apenas de " r " conforme foi mostrado na equação (2.34). O vetor " $\underline{\nabla} r$ " no lado direito da expressão (2.39) é o vetor unitário " \underline{r}_u " na direção de " \underline{r} " (ver figura 2.3), isto é,

$$\underline{\nabla} r = \frac{1}{r} \underline{r} = \underline{r}_u \quad (2.40)$$

Conseqüentemente a equação (2.39) pode ser escrita da seguinte forma

$$p_s^* (\xi ; w) = \frac{\partial u^*}{\partial r} \underline{r}_u \circ \underline{s} \quad (2.41)$$

sendo " \underline{r}_u " dado por

$$\underline{r}_u = (r_u)_x \underline{i} + (r_u)_z \underline{k} \quad (2.42)$$

$$(r_u)_x = \frac{1}{r} (x_w - x_\xi) \quad (2.43)$$

$$(r_u)_z = \frac{1}{r} (z_w - z_\xi)$$

Na formulação do Método dos Elementos de Contorno é necessário calcular a Velocidade Fundamental " $p^*(\xi;w)$ " na direção normal à superfície " Γ " de um subdomínio " Ω " do domínio infinito " Ω^* " ($\Omega + \Gamma \in \Omega^*$). Nesse caso, o vetor " \underline{s} " indicado na expressão (2.39) é substituído pelo vetor " \underline{n} " e a velocidade fundamental " $p^*(\xi;w)$ " é calculada por (ver figura 2.4) :

$$p^*(\xi;w) = \frac{\partial u^*}{\partial r} \underline{r}_u \circ \underline{n} \quad (2.44)$$

Tendo em vista a expressão (2.34) a equação (2.44) pode ser escrita como :

$$p^*(\xi;w) = - \frac{1}{2\pi r} (\underline{r}_u \circ \underline{n}) \quad (2.45)$$

sendo oportuno lembrar que (ver figura 2.4)

$$\underline{r}_u \circ \underline{n} = \frac{1}{r} \left[(r_u)_x n_x + (r_u)_z n_z \right] = \cos \varphi \quad (2.46)$$

2.7 Equação Integral de Contorno para a Equação de Laplace e para Pontos do Contorno

Neste ítem é apresentada a dedução da equação integral

para pontos fontes " ξ " pertencentes ao contorno " Γ ". Esta será a equação básica para a análise numérica de problemas governados pela Equação de Laplace, via o Método dos Elementos de Contorno, discutido neste trabalho.

A equação (2.33) foi obtida para funções de ponderação que atendam a " $\nabla^2 u^* = 0$ " em todo o domínio. Se for adotada a função " $u^* = -(1/2\pi) \ln(r)$ " haverá uma singularidade quando " $r = 0$ " , ou seja, quando o ponto fonte " ξ " e o ponto campo " w " coincidirem. A expressão (2.33) pode então ser aplicada desde que se exclua de " Ω " um domínio circular cujo centro coincide com " ξ ", cujo raio é " ε " e cujo contorno é " Γ_ε " conforme mostrado na figura (2.5). Este novo domínio será chamado de " $\Omega - \Omega_\varepsilon$ ". Denominando " $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ " a parte de " Γ " que foi excluída (ver linha tracejada na figura 2.5), pode-se então escrever a a equação (2.33) da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} \left[u^*(\xi; w) p(w) - p^*(\xi; w) u(w) \right] d\Gamma(w) + \\ & + \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[u^*(\xi; w) p(w) - p^*(\xi; w) u(w) \right] d\Gamma_\varepsilon(w) = 0 \quad (2.47) \end{aligned}$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, ($\Omega - \Omega_\varepsilon$) $\rightarrow \Omega$, ($\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon$) $\rightarrow \Gamma$

e (Mansur et alii [19])

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p^*(\xi; w) u(w) d\Gamma(w) = \frac{\beta}{2\pi} u(\xi) \quad (2.48)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u^*(\xi; w) p(w) d\Gamma(w) = 0 \quad (2.49)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} u^*(\xi; w) p(w) d\Gamma(w) = VP \int_{\Gamma} u^*(\xi; w) p(w) d\Gamma(w) \quad (2.50)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} p^*(\xi; w) u(w) d\Gamma(w) = VP \int_{\Gamma} p^*(\xi; w) u(w) d\Gamma(w) \quad (2.51)$$

sendo " β " na equação (2.48) o ângulo interno formado pelas tangentes a " Γ " em " ξ " , conforme mostrado na figura 2.5 .

O símbolo " VP " nas equações (2.50) e (2.51) que indica integração no sentido de Valor Principal de Cauchy será abolido daqui para a frente (ver Apêndice A).

Em vista das equações (2.47), (2.48), (2.49), (2.50) e (2.51) pode-se escrever a equação integral que dá origem ao MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO para a Equação de Laplace na seguinte forma

$$c(\xi) u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi; w) p(w) d\Gamma(w) - \int_{\Gamma} p^*(\xi; w) u(w) d\Gamma(w) \quad (2.52)$$

Como aqui " ξ " pertence ao contorno então " $c(\xi) = \beta/2\pi$ ". Quando " ξ " se localiza sobre uma parte suave do contorno " Γ ", então " $\beta = \pi$ " e por conseguinte " $c(\xi) = 0,5$ " .

Cabe observar que a equação (2.52) obedece a convenção para integração implícita no Teorema da Divergência para duas dimensões, isto é, um observador que percorra o contorno " Γ " no sentido de integração deve deixar o domínio à sua esquerda.

Quando é necessário trabalhar com pontos " ξ " pertencentes ao interior do domínio então " $c(\xi) = 1$ ". Para calcular " u " e " p " em pontos internos aplica-se a teoria descrita no Apêndice B, capítulo 9, deste trabalho.

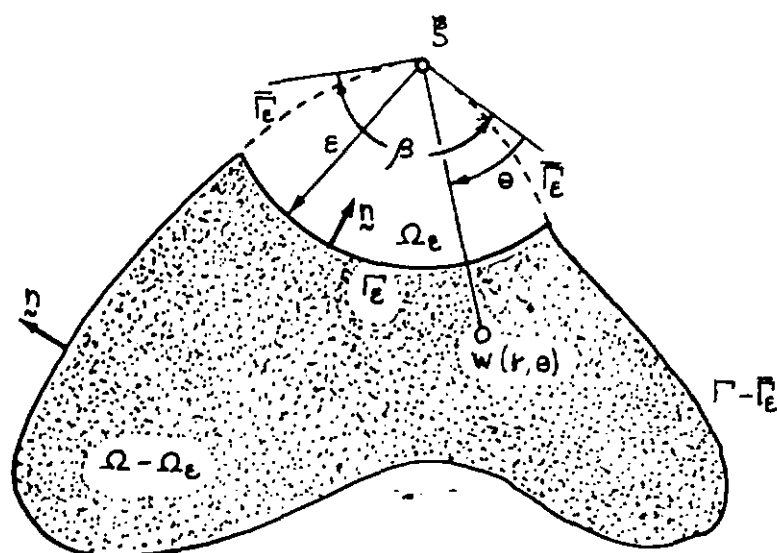


Figura 2.5 - Domínio " $\Omega - \Omega_\epsilon$ " para pontos " ζ " pertencentes ao contorno " Γ ".

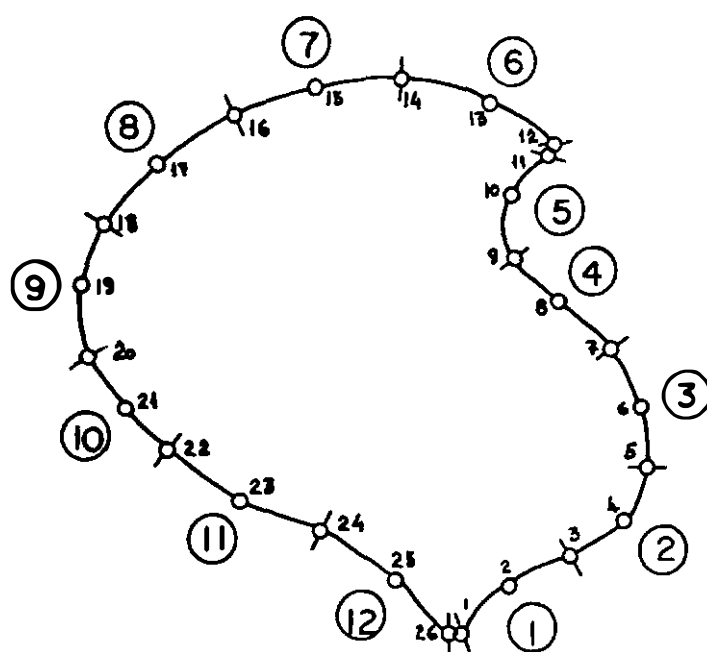


Figura 2.6 - Discretização com Elemento Isoparamétrico Quadrático. \bigcirc = n° elemento, n = n° nó; ϕ = nó extremo, \circ = nó central;

2.8 Discretização com Elementos Isoparamétricos Quadráticos

Para se obter a solução numérica da equação integral de contorno (2.52) é necessário que se discretize o contorno "Γ" em elementos, sendo esta discretização compatível com a geometria, com a distribuição de potencial de velocidades e velocidades prescritos ou incógnitos.

Na figura 2.6 está ilustrada uma malha com 26 nós e 12 elementos isoparamétricos quadráticos.

A utilização de polinômios de Lagrange para aproximar a geometria de um elemento estabelece que as coordenadas " x " e " z " de um ponto no interior do mesmo sejam obtidas a partir de :

$$x = \sum_{k=1}^K N_k(\eta) x_k \quad \text{e} \quad z = \sum_{k=1}^K N_k(\eta) z_k \quad (2.53)$$

onde

x_k, z_k são coordenadas " x " e " z " do nó " k " do elemento

$N_k(\eta)$ são funções de interpolação e

η é a coordenada natural, $\eta \in [-1 ; +1]$

As funções de forma $N_k(\eta)$ para elementos quadráticos ($k = 3$), ilustrados na figura 2.7 , são dadas por

$$N_1(\eta) = \frac{1}{2} \eta (\eta - 1)$$

$$N_2(\eta) = (1 - \eta) (1 + \eta) \quad (2.54)$$

$$N_3(\eta) = \frac{1}{2} \eta (\eta + 1)$$

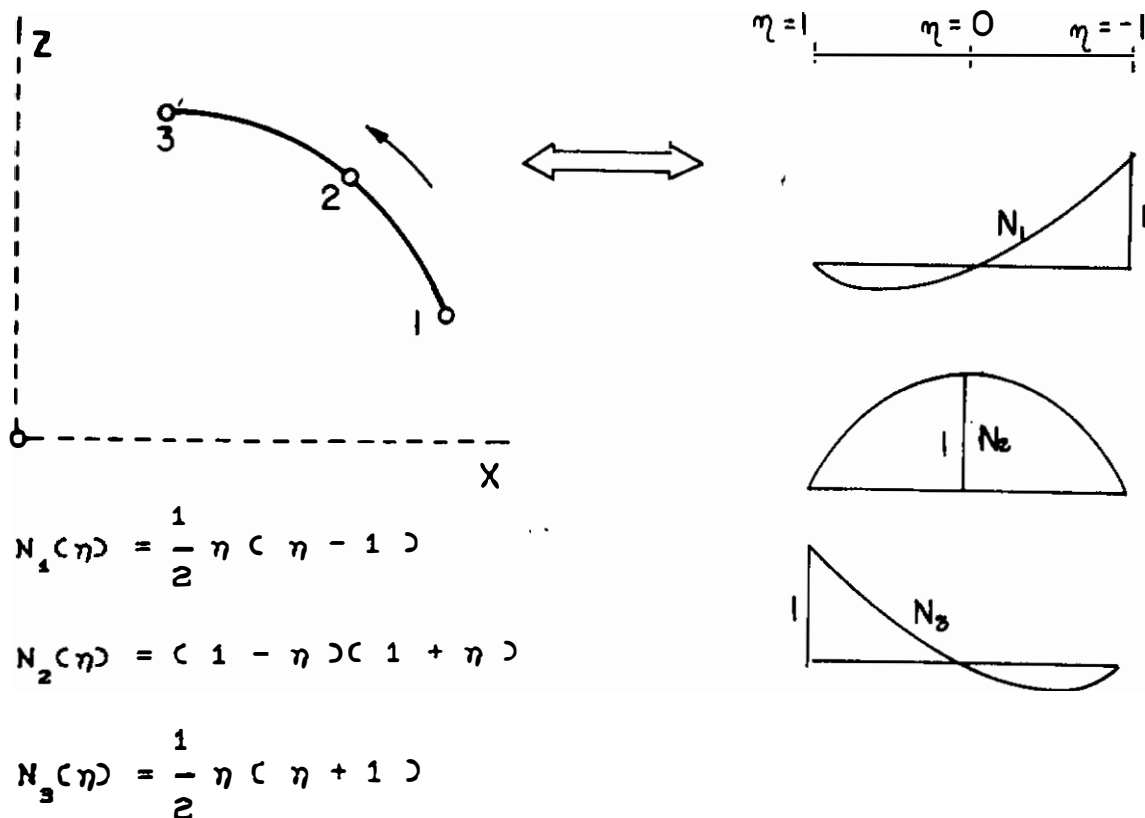
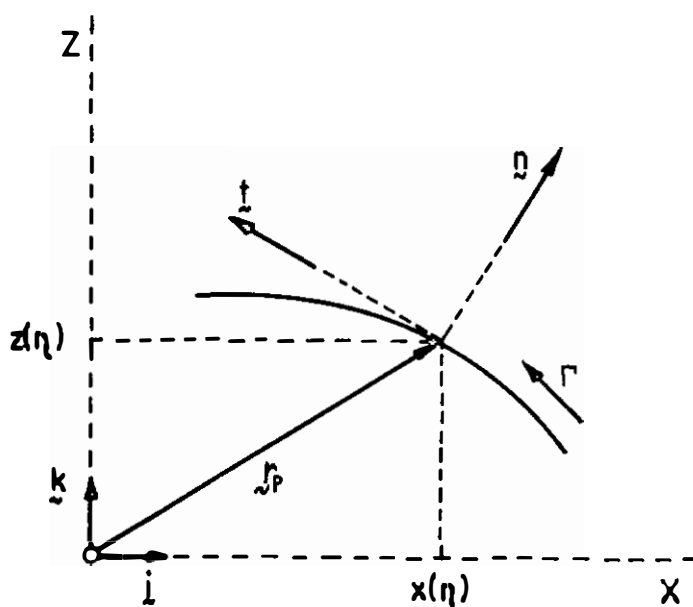


Figura 2.7-Elementos Quadráticos para discretização da geometria.



respectivamente às coordenadas naturais $\eta = -1$, $\eta = 0$ e $\eta = +1$. Esta correspondência pode acarretar distorções na representação da geometria, seja por dificuldade de se posicionar o nó central no ponto médio do elemento, seja em análises nas quais a posição deste nó se altere devido a um processo iterativo ou transiente como ocorre por exemplo em problemas de propagação de ondas gravitacionais não lineares. Esquemas simples para a correção do nó central podem ser utilizados sem acréscimo significativo de tempo de computação.

O potencial de velocidades " u " e a velocidade normal " p " são aproximados no interior de cada elemento de forma semelhante à aproximação utilizada para a geometria, ou seja

$$x(w) = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \quad (2.55)$$

$$z(w) = N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 \quad (2.56)$$

$$u(w) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (2.57)$$

$$p(w) = N_1 p_1 + N_2 p_2 + N_3 p_3 \quad (2.58)$$

sendo

$w(\eta)$ = ponto interno do elemento no contorno correspondente à coordenada natural " η " ;

x_k = coordenada "x" no ponto nodal "k" (1,2 ou 3) do elemento

z_k = coordenada "z" no ponto nodal "k" (1,2 ou 3) do elemento

u_k = potencial de velocidades "u" no ponto nodal " k " (1,2 ou 3) do elemento

p_k = velocidade normal " p " no ponto nodal " k " (1,2 ou 3) do elemento.

Em forma matricial as expressões (2.57) e (2.58) podem ser escritas para o elemento " e " (são funções da coordenda " η " correspondente ao ponto " w ") como :

$$u(\eta) = \underline{N} \underline{u}^o \quad \text{e} \quad p(\eta) = \underline{N} \underline{p}^o \quad (2.59)$$

onde

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1(\eta) & N_2(\eta) & N_3(\eta) \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\underline{u}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}^e, \quad \underline{p}^e = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}^e$$

Para se estabelecer a forma discreta da equação (2.52), as integrais em " Γ " devem ser substituídas por somatórios de integrais sobre cada elemento "e", totalizando " E " somas igual ao número de elementos de contorno.

Considerando-se as expressões para " u " e " p " dadas pelas equações contidas em (2.59) obtém-se

$$c(\xi) u(\xi) + \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{\Gamma_e} p^*(\xi; w) \underline{N}(\eta) d\Gamma_e(w) \right\} \underline{u}^e =$$

$$= \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{\Gamma_e} u^*(\xi; w) \underline{N}(\eta) d\Gamma_e(w) \right\} \underline{p}^e \quad (2.61)$$

As integrações indicadas na expressão (2.61) podem ser efetuadas com relação à coordenada natural " η ". Neste caso a equação (2.61) deve ser escrita da seguinte forma

$$c(\xi) u(\xi) + \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{-1}^{+1} p^*(\xi; w) \underline{N}(\eta) |J_{\Gamma/\eta}(\eta)|_e d\eta \right\} \underline{u}^e =$$

$$= \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{-1}^{+1} u^*(\xi; w) \underline{N}(\eta) |J_{\Gamma/\eta}(\eta)|_e d\eta \right\} \underline{p}^e \quad (2.62)$$

sendo

$$d\Gamma_e = |J_{\Gamma/\eta}(\eta)|_e d\eta = J_1 d\eta \quad (2.63)$$

A expressão para o Jacobiano do elemento " e " no ponto " η " ($|J_{\Gamma/\eta}(\eta)|_e$) associado à transformação de coordenadas indicada na expressão (2.53) pode ser calculado a partir das equações paramétricas da curva " Γ_e " utilizando-se a seguinte representação (ver figura 2.8)

$$\underline{r}_p = x(\eta) \underline{i} + z(\eta) \underline{k} \quad (2.64)$$

A diferencial total " $d\underline{r}_p$ " , que é um vetor tangente à curva no ponto considerado é dada por

$$d\underline{r}_p = \frac{dx}{d\eta} d\eta \underline{i} + \frac{dz}{d\eta} d\eta \underline{k} \quad (2.65)$$

Conseqüentemente (o índice " e " foi suprimido)

$$d\Gamma = \sqrt{d\underline{r}_p \cdot d\underline{r}_p} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2} d\eta \quad (2.66)$$

ou seja

$$|J_{\Gamma/\eta}(\eta_i)|_e = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2} \quad (2.67)$$

As derivadas indicadas na equação (2.67) são obtidas diretamente a partir da equação (2.53), isto é :

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{dN_1}{d\eta} x_1 + \frac{dN_2}{d\eta} x_2 + \frac{dN_3}{d\eta} x_3 \quad (2.68)$$

$$\frac{dz}{d\eta} = \frac{dN_1}{d\eta} z_1 + \frac{dN_2}{d\eta} z_2 + \frac{dN_3}{d\eta} z_3 \quad (2.69)$$

Para se efetuar as integrais indicadas na equação (2.62) deve-se conhecer as expressões dos integrandos em função da coordenada natural " η " . O Jacobiano é dado pela expressão (2.67). As coordenadas do ponto campo $w(x(\eta) , z(\eta))$ (e conseqüentemente a distância " r " entre " ξ " e " w ") podem ser determinadas a partir da expressão (2.53). Sendo assim, resta apenas determinar a expressão para o vetor unitário normal " $\underline{n}(\eta)$ " .

O vetor unitário tangente à curva,

$$\underline{t} = t_x \underline{i} + t_z \underline{k} \quad (2.70)$$

pode ser calculado por (ver figura 2.8)

$$\underline{t} = \frac{d\underline{r}_p}{d\Gamma} = \frac{d\underline{r}_p}{d\eta} \frac{d\eta}{d\Gamma} = \frac{1}{J_1} \frac{d\underline{r}_p}{d\eta} \quad (2.71)$$

Das condições (\times = produto vetorial, $\underline{j} = \underline{i} \times \underline{k}$ e \circ = produto escalar)

$$\underline{t} \circ \underline{n} = 0 \quad (2.72)$$

$$\underline{n} \times \underline{t} = \underline{j} \quad (2.73)$$

obtém-se o vetor normal

$$\underline{n} = t_z \underline{i} - t_x \underline{k} \quad (2.74)$$

ou seja

$$\underline{n} = \frac{1}{J_1} \left[\frac{dz}{d\eta} \underline{i} - \frac{dx}{d\eta} \underline{k} \right] \quad (2.75)$$

ou de outra forma

$$\underline{n} = (n_x , n_z) = \left(\frac{dz}{d\eta} \frac{1}{J_1} , - \frac{dx}{d\eta} \frac{1}{J_1} \right) \quad (2.76)$$

A equação integral (2.62) pode ser escrita de forma mais compacta como

$$\begin{aligned}
 c(\xi) u(\xi) + \sum_{e=1}^E \left[\begin{array}{ccc} h_1(\xi) & h_2(\xi) & h_3(\xi) \end{array} \right]^e \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\}^e = \\
 = \sum_{e=1}^E \left[\begin{array}{ccc} g_1(\xi) & g_2(\xi) & g_3(\xi) \end{array} \right]^e \left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \right\}^e \quad (2.77)
 \end{aligned}$$

ou ainda

$$c(\xi) u(\xi) + \sum_{e=1}^E \underline{h}^e(\xi) \underline{u}^e = \sum_{e=1}^E \underline{g}^e(\xi) \underline{p}^e \quad (2.78)$$

onde um coeficiente genérico das matrizes " $\underline{h}^e(\xi)$ " e " $\underline{g}^e(\xi)$ " de ordem (1 x 3) é dado por

$$h_k^e(\xi) = \int_{-1}^{+1} p^*(\xi; \eta) N_k(\eta) J_1 d\eta \quad (2.79)$$

$$g_k^e(\xi) = \int_{-1}^{+1} u^*(\xi; \eta) N_k(\eta) J_1 d\eta$$

A equação (2.78) utiliza índices de elemento ($e = 1, \dots, E$) e um esquema de numeração de nós local para cada elemento ($k = 1, 2$ ou 3). Entretanto, para se montar o sistema final de equações é necessário relacionar a numeração local dos nós dos elementos a um sistema de numeração global, onde cada nó é associado a um número inteiro $j \in \{ 1, 2, \dots, J \}$ onde " J " é o número de nós. A correspondência entre a numeração local e global é ilustrada na figura 2.9.

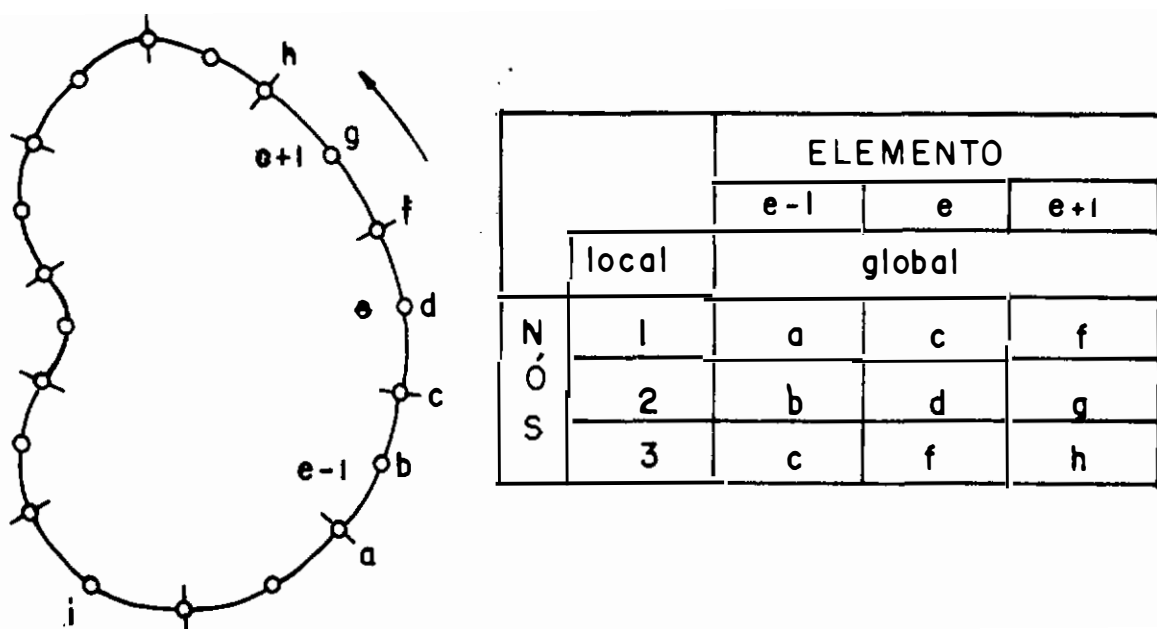


Figura 2.9 - Correspondência entre os sistemas de numeração local e global.

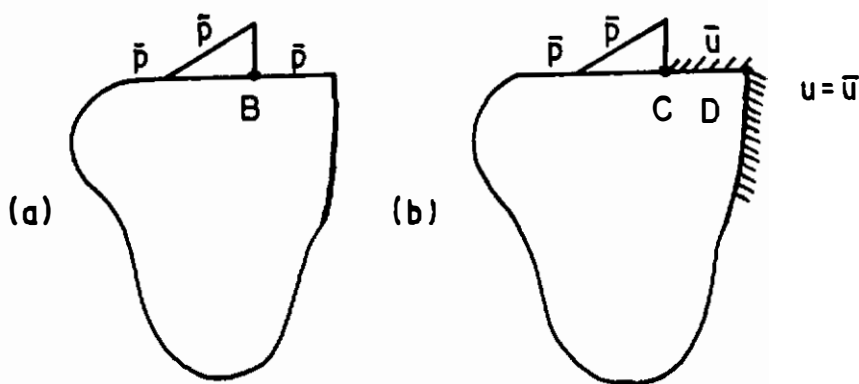


Figura 2.10 - Situações típicas nas quais ocorrem descontinuidades de velocidade normal. (a) Velocidade normal descontínua prescrita no ponto " B ". (b) Velocidade normal prescrita à direita e potencial de velocidades prescrito à esquerda do ponto " C ". Potencial de velocidades prescrito à direita e à esquerda do ponto " D " onde o contorno não é suave.

Exceto em situações especiais, que serão discutidas mais a frente neste texto, sempre que elementos isoparamétricos são empregados os pontos nodais são utilizados como pontos de colocação. A equação (2.78) para um ponto de colocação coincidente com um nó " i " ($\xi = \xi_i$) pode ser escrita como indicada abaixo

$$c_i u_i + \sum_{e=1}^E h_i^e \underline{u}^e = \sum_{e=1}^E g_i^e p^e \quad (2.80)$$

onde

$$c_i = c(\xi_i) \quad e \quad u_i = u(\xi_i) \quad (2.81)$$

Admitindo-se continuidade de potencial de velocidades e velocidade entre elementos, a equação (2.80) pode ser escrita como

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^J \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^J G_{ij} p_j \quad (2.82)$$

onde o índice "j" corresponde a numeração global dos nós.

Para a situação ilustrada na figura 2.9 onde

$$\underline{u}^{e-1} = \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{Bmatrix}, \quad \underline{u}^e = \begin{Bmatrix} u_c \\ u_d \\ u_f \end{Bmatrix}, \quad \underline{u}^{e+1} = \begin{Bmatrix} u_f \\ u_g \\ u_h \end{Bmatrix} \quad (2.83)$$

tem-se

$$u_3^{e-1} = u_1^e = u_c, \quad u_2^e = u_d, \quad u_3^e = u_1^{e+1} = u_f \quad (2.84)$$

Neste caso os coeficientes globais \hat{H}_{ic} , \hat{H}_{id} e \hat{H}_{if} que multiplicam respectivamente "u_c", "u_d" e "u_f" na equação (2.82) são obtidos por

$$\hat{H}_{ic} = \begin{pmatrix} h_3^{e-1} \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} h_1^e \end{pmatrix}_1, \quad \hat{H}_{id} = \begin{pmatrix} h_2^e \end{pmatrix}_1, \quad \hat{H}_{if} = \begin{pmatrix} h_3^e \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} h_1^{e+1} \end{pmatrix}_1 \quad (2.85)$$

Este mesmo procedimento de montagem se aplica aos coeficientes G_{ij} . O sistema de equações

$$\underline{H} \underline{u} = \underline{G} \underline{p} \quad (2.86)$$

pode então ser montado considerando-se as " I " equações originárias da expressão (2.82). Quando os pontos fontes "i" coincidem com os pontos nodais " I = J " e as matrizes " \underline{H} " e " \underline{G} " tem ordem (J x J). Deve-se observar que na equação (2.86)

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} \quad \text{se } i \neq j \quad (2.87)$$

$$H_{ij} = c_i + \hat{H}_{ij} \quad \text{se } i = j \quad (2.88)$$

Quando os valores nodais das condições de contorno prescritas são introduzidos na equação (2.86), o remanejamento adequado das colunas das matrizes " \underline{H} " e " \underline{G} " permite que esta equação seja escrita como

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{B} \quad (2.89)$$

onde

$$\underline{A}_{ij} = \begin{cases} -H_{ij} & \text{se } "p_j" \text{ é prescrito} \\ +G_{ij} & \text{se } "u_j" \text{ é prescrito} \end{cases}$$

\underline{X} é o vetor de incógnitas (u_j ou p_j)

\underline{B} é o vetor de termos independentes, obtido a partir dos valores nodais conhecidos, " u_j " ou " p_j ", multiplicados respectivamente pelos coeficientes " H_{ij} " ou " $-G_{ij}$ "

correspondentes .

Os coeficientes da diagonal da matriz " \underline{H} " mostrada na equação (2.88) podem ser calculados por um procedimento alternativo ao mostrado anteriormente, a partir da situação correspondente a uma distribuição de potencial de velocidade constante atuando sobre um corpo. Neste caso,

$$p_j = \text{zero} \quad \text{e} \quad u_j = \text{constante} \quad (2.90)$$

e, conseqüentemente, quando a expressão (2.90) é substituída na expressão (2.82) obtém-se

$$H_{11} = - \sum_{j=1, j \neq 1}^J H_{1j} \quad (2.91)$$

A expressão (2.91) é válida para regiões finitas. No caso de meios infinitos,

$$H_{11} = 1 - \sum_{j=1, j \neq 1}^J H_{1j} \quad (2.92)$$

Quando existe continuidade de velocidade normal as equações obtidas considerando-se apenas pontos de colocação coincidentes com os nós são suficientes para se calcular as incógnitas. Entretanto, pode ocorrer que velocidades normais (conhecidas ou não) sejam descontínuas em determinados pontos do contorno, estando algumas situações típicas ilustradas na figura 2.10 . Neste caso a discretização deve ser tal que os pontos onde haja (ou se espera) descontinuidade de velocidade normal se localizem em nós de extremidade de dois elementos adjacentes conforme ilustrado na figura 2.11.

Para cada ponto onde a velocidade normal é descontínua não é forçada a igualdade de velocidade normal nos nós extremos dos elementos adjacentes ($p_f \neq p_g$ na figura 2.11) ocorrendo portanto uma incógnita extra quando a situação é a correspondente à do ponto "D" da figura 2.10b .

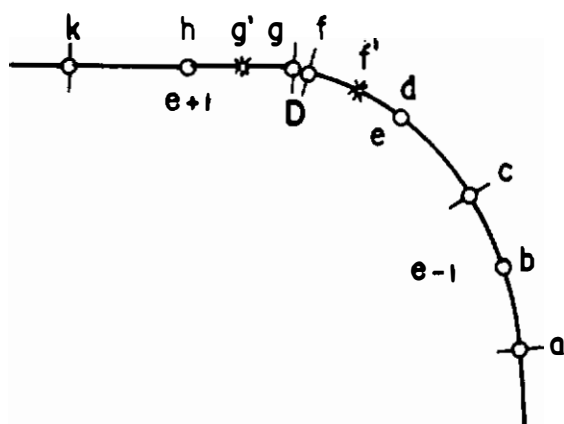


Figura 2.11 - Discretização correspondente a descontinuidade de velocidade normal no ponto " D " da figura 2.10b. " * " são pontos de colocação no interior dos elementos adjacentes ao ponto de descontinuidade.

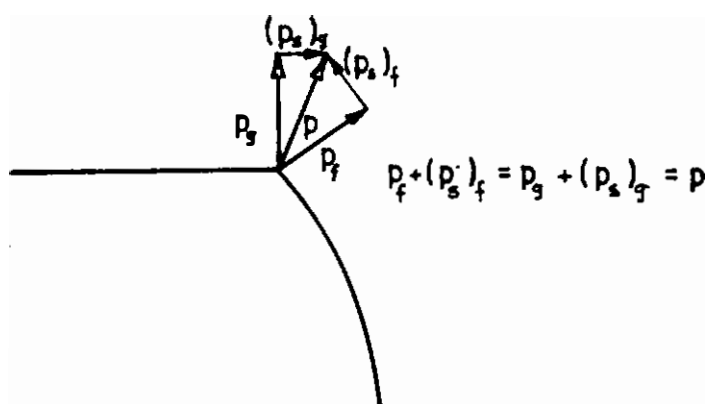


Figura 2.12 - Condição de continuidade de velocidade normal resultante, quando existe descontinuidade de velocidade na direção normal ao contorno.

$$(p_s)_f = (\partial u / \partial s)_f \quad \text{e} \\ (p_s)_g = (\partial u / \partial s)_g.$$

A equação adicional que substitui " $p_f = p_g$ " pode ser estabelecida a partir da condição de que a velocidade resultante (= velocidade da partícula) à esquerda e à direita do ponto de descontinuidade sejam iguais, conforme ilustrado na figura 2.12 .

Deve-se observar que quando as condições de contorno correspondem à situação do tipo indicado para o ponto " B " da figura 2.10a ou ponto " C " da figura 2.10b, a equação extra obtida conforme ilustrado na figura 2.12 é desnecessária já que a condição de continuidade de potenciais de velocidades implica na existência de apenas uma incógnita nestes pontos.

Alternativamente, a equação extra pode também ser obtida sem as considerações sobre comportamento físico feitas acima. Neste caso são utilizados dois pontos de colocação associados ao ponto onde há descontinuidade de velocidade normal (que não é mais ponto de colocação), localizados no interior dos elementos a ele adjacentes, conforme mostrado na figura 2.11. Continuidade de potencial de velocidades não é mais forçada, entretanto deve ocorrer se a malha estiver suficientemente refinada. Diferenças significativas no valor do potencial de velocidades em nós vizinhos a pontos onde há descontinuidade de velocidade normal ("f" e " g " na figura 2.11) são indicações de malha pobre.

O procedimento de colocação não-nodal que acabou de ser descrito é o que será utilizado nas aplicações numéricas apresentadas neste trabalho, tendo sido escolhido por ser vantajoso em várias aplicações (por exemplo em problemas que envolvam combinação MEC-MEF) além de tornar a programação mais fácil de sistematizar (Referência 20).

Os coeficientes das colunas da matriz " \hat{H} " correspondentes aos nós "g" e "f" mostrados na figura 2.11 não se somam tendo em vista que a igualdade " $u_g = u_f$ " não foi forçada. Neste caso (comparar com a expressão (2.85)) tem-se :

$$\hat{H}_{if} = (h_3^e)_i \quad e \quad \hat{H}_{ig} = (h_1^{e+1})_i \quad (2.93)$$

sendo o mesmo procedimento aplicado aos coeficientes " G_{1f} " e " G_{1g} ".

As expressões (2.87) e (2.88) permanecem válidas para coeficientes " H_{1j} " pertencentes a linhas geradas a partir de pontos de colocação coincidentes com os nós. Para linhas geradas a partir de pontos de colocação não-nodais (pontos " f' " e " g' " na figura 2.11) a expressão (2.88) não é mais válida, e a expressão (2.87) só se aplica quando " j " não coincidir com nenhum número de nó do elemento que contiver o ponto de colocação. Para a situação mostrada na figura 2.11, em linhas geradas quando o ponto fonte " ξ " for o ponto " f' " tem-se

$$H_{1j} = \hat{H}_{1j} \quad \text{se} \quad j \neq \begin{cases} c \\ d \\ f \end{cases} \quad (2.94)$$

e se o ponto fonte coincidir com " g' "

$$H_{1j} = \hat{H}_{1j} \quad \text{se} \quad j \neq \begin{cases} g \\ h \\ k \end{cases} \quad (2.95)$$

Quando o ponto fonte coincide com " f' " a equação (2.82) pode ser escrita como

$$c(f') u(f') + \sum_{j=1}^J \hat{H}_{1j} u_j = \sum_{j=1}^J G_{1j} P_j \quad (2.96)$$

Neste caso, como " f' " se localiza no interior do elemento cuja geometria é sempre suave, $c(f') = 0,5$. O potencial de velocidades não-nodal " $u(f')$ " que pode ser incógnita se " $f' \in \Gamma_p$ ", deve ser eliminado do sistema de equações utilizando-se para tal finalidade a expressão (2.57) que interpola o potencial de velocidades no interior de um elemento a partir de seus valores nodais. Neste caso a expressão (2.96) pode ser escrita como indicado a seguir

$$0,5 \left[N_1(\eta') u_c + N_2(\eta') u_d + N_3(\eta') u_f \right] + \sum_{j=1}^J \hat{H}_{1j} u_j =$$

$$= \sum_{j=1}^J G_{1j} p_j \quad (2.97)$$

sendo " η' " a coordenada natural correspondente ao ponto " f' " (ver figura 2.11). Nas experiências numéricas descritas a frente adotou-se $\eta' = \pm 0,5$ (Referência 20). A partir da equação (2.97) pode-se concluir facilmente que

$$H_{fc} = \hat{H}_{fc} + 0,5 N_1(\eta')$$

$$H_{fd} = \hat{H}_{fd} + 0,5 N_2(\eta') \quad (2.98)$$

$$H_{ff} = \hat{H}_{ff} + 0,5 N_3(\eta')$$

sendo o procedimento para a linha " g " semelhante.

—

2.9 Integração Numérica (ou Quadratura) Gaussiana

Um dos tópicos que merece bastante atenção no Método dos Elementos de Contorno é aquele relacionado com as integrações indicadas nas expressões (2.79). O cálculo analítico destas integrais para elementos com geometria curva é na maioria dos casos inviável, sendo necessário empregar procedimentos numéricos.

Conforme já discutido na seção 2.7, as integrais resultantes da formulação do Método dos Elementos de Contorno devem ser calculadas no sentido de valor principal da Cauchy.

Em alguns casos (como ocorre na formulação direta para a equação de Laplace discutida aqui) o valor principal das integrais que resultam, coincide com o resultado obtido quando estas são efetuadas no sentido usual. Sendo assim, mesmo quando existe singularidade no integrando (" ξ " pertence ao elemento que está sendo integrado) os coeficientes de influência indicados na equação (2.79) podem ser calculados por integração numérica de Gauss, conforme ilustrado pela expressão que se segue :

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\eta) d\eta \cong \sum_{d=1}^{NG} f(\eta_d) P(\eta_d) \quad (2.99)$$

sendo :

η_d valores discretos da coordenada natural entre $[-1 ; +1]$ dados pelo método da Quadratura de Gauss. Pode-se escolher o número de coordenadas (d) a serem utilizadas para integração (1, 2, 3, ..., n). Este método integra exatamente polinômios de ordem " $2d - 1$ ". Na expressão (2.99) foram escolhidos " NG " pontos. Para cada número de pontos de integração escolhido pode-se encontrar uma tabela contendo " d " coordenadas " η_d " e seus respectivos pesos " $P(\eta_d)$ " . As

tabelas utilizadas neste trabalho foram obtidas na referência [6].

$P(\eta_d)$ peso de Gauss referente à coordenada " η_d "

$f(\eta)$ função a ser integrada

$f(\eta_d)$ valor da função no ponto " η_d "

NG Número de pontos de integração de Gauss adotado

As integrais indicadas na expressão (2.79) são do tipo mostrado em (2.99), tendo em vista que " ξ " é fixo e as coordenadas " x_d " e " z_d " de um ponto " w " correspondente à coordenada " η_d " no interior do elemento " e " podem ser diretamente calculadas a partir da expressão (2.53) bastando fazer " $\eta = \eta_d$ " .

Neste caso (ver expressões (2.79)) :

$$\begin{aligned} h_k^e(\xi) &= \int_{-1}^{+1} p^*(\xi; w(\eta)) N_k(\eta) J_1(\eta) d\eta = \\ &\cong \sum_{d=1}^{NG} p^*(\xi; w(\eta_d)) N_k(\eta_d) J_1(\eta_d) P(\eta_d) \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} g_k^e(\xi) &= \int_{-1}^{+1} u^*(\xi; w(\eta)) N_k(\eta) J_1(\eta) d\eta = \\ &\cong \sum_{d=1}^{NG} u^*(\xi; w(\eta_d)) N_k(\eta_d) J_1(\eta_d) P(\eta_d) \end{aligned} \quad (2.101)$$

A Quadratura de Gauss pode ser utilizada na forma mostrada nas expressões (2.100) e (2.101) para realizar todas as integrações sobre elementos. Entretanto, os integrandos destas equações contém as funções " u^* " e " p^* " que por sua vez dependem da distância " r " entre

os pontos " ξ " e " w ", " $w \in \Gamma_e$ ".

" u^* " é singular quando " $w = \xi$ " ($r = \text{zero}$).

Outra situação que deve ser cuidadosamente analisada é aquela que ocorre quando o ponto fonte " ξ " está muito próximo do ponto campo " w ", porém não pertence ao elemento que está sendo integrado. Neste caso as funções " u^* " e " p^* " tornam-se quase-singulares.

Em vista do exposto acima dois casos devem ser considerados

$\xi \notin \Gamma_e \Rightarrow$ o ponto fonte " ξ " não pertence ao elemento " e " sobre o qual se está integrando : $r(\xi;w) \neq 0$.

$\xi \in \Gamma_e \Rightarrow$ o ponto fonte " ξ " pertence ao elemento " e " sobre o qual se está integrando : $r(\xi;w)$ pode ser ou não igual a zero .

No primeiro caso dos dois mencionados acima estão incluídas as chamadas integrais não-singulares, ou seja, as bem comportadas e as quase-singulares.

O segundo caso considera as integrais singulares, que são integrais sobre elementos que calculam os coeficientes de influência da diagonal principal das matrizes " H " e " G " e os coeficientes vizinhos.

No esquema de integração numérica indicado nas expressões (2.100) e (2.101) deve-se empregar um número de pontos de Gauss (NG) escolhido por um critério seletivo baseado na distância mínima " D " entre o ponto fonte " ξ " e o elemento " e " comparada com o comprimento do elemento. O número de pontos de integração aumenta à medida que esta distância diminui. Um critério de seleção do número de pontos de Gauss quando bem definido melhora a eficiência (precisão x tempo de CPU) da integração numérica. Entretanto um ganho muito mais significativo pode ser obtido quando estes critérios seletivos são utilizados em conjunto com esquemas de integração um pouco mais sofisticados. Por sua generalidade e simplicidade o esquema proposto na referência [1] foi

adotado no programa computacional deste trabalho e aqui será ilustrado . Neste esquema a Quadratura de Gauss é utilizada tanto para a integração singular quanto para a quase-singular após a realização da seguinte transformação de coordenadas :

$$\eta(\gamma) = a \gamma^3 + b \gamma^2 + c \gamma + d \quad (2.102)$$

onde

γ é a coordenada fornecida pela tabela de Quadratura de Gauss e à " η " levará seu peso de integração correspondente ;

η é a coordenada natural do elemento ;

a, b, c, d são parâmetros dependentes da posição relativa entre o ponto fonte e o elemento sobre o qual se está integrando . Suas expressões, calculadas pelo autor da referência [1], são as seguintes :

$$a = (1 - \bar{r}) / Q \quad (2.103)$$

$$b = -3 (1 - \bar{r}) \bar{\gamma} / Q \quad (2.104)$$

$$c = (\bar{r} + 3 \bar{\gamma}^2) / Q \quad (2.105)$$

$$d = -b \quad (2.106)$$

$$Q = 1 + 3 \bar{\gamma}^2 \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} = & \sqrt[3]{ \left[-q + \sqrt{ \left(q^2 + p^3 \right) } \right] } + \sqrt[3]{ \left[-q - \sqrt{ \left(q^2 + p^3 \right) } \right] } + \\ & + \frac{\bar{\eta}}{1 + 2 \bar{r}} \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$q = \frac{1}{2 (1 + 2 \bar{r})} \left[\left(\bar{\eta} (3 - 2 \bar{r}) - \frac{2 \bar{\eta}^3}{1 + 2 \bar{r}} \right) \frac{1}{1 + 2 \bar{r}} - \bar{\eta} \right] \quad (2.109)$$

$$p = \frac{1}{3 (1 + 2 \bar{r})} \left[4\bar{r} (1 - \bar{r}) + 3 (1 - \bar{\eta}^2) \right] \quad (2.110)$$

A transformação cúbica mostrada na equação (2.102) produz automaticamente uma concentração dos pontos de integração de Gauss na região do elemento mais próxima do ponto fonte.

As constantes "a", "b", "c" e "d" indicadas nas equações (2.103) a (2.107) são determinadas a partir das seguintes exigências :

$$J_{\eta/\gamma} = \left. \frac{d\eta}{d\gamma} \right|_{\eta=\bar{\eta}} = \bar{r} \quad (2.111)$$

$$\left. \frac{d^2\eta}{d\gamma^2} \right|_{\eta=\bar{\eta}} = 0$$

$$\eta (\gamma = 1) = 1 \quad (2.112)$$

$$\eta (\gamma = -1) = -1$$

onde

$\bar{\eta}$ é o valor da coordenada " η " correspondente ao ponto do elemento mais próximo ao ponto fonte " ξ "

$$J_{\eta/\gamma} = J_2 = \frac{d\eta}{d\gamma} = 3 a \gamma^2 + 2 b \gamma + c \quad (2.113)$$

$$\frac{d^2\eta}{d\gamma^2} = 6 a \gamma + 2 b \quad (2.114)$$

\bar{r} é um parâmetro livre, que depende da distância mínima "D" e que foi calculado na referência [1] de modo a se ter um erro mínimo de integração no sentido de mínimos quadrados :

$$\bar{r} = 0 \quad \text{se} \quad 0,0 \leq D < 0,05$$

$$\bar{r} = 0,85 + 0,24 \ln(D) \quad \text{se} \quad 0,05 \leq D < 1,3$$

$$\bar{r} = 0,893 + 0,0832 \ln(D) \quad \text{se} \quad 1,3 \leq D < 3,618$$

$$\bar{r} = 1 \quad \text{se} \quad D \geq 3,618 \quad (2.115)$$

" D " é calculada por $D = 2 r_{\min} / L$ onde " r_{\min} " é a menor distância entre o ponto fonte e o elemento e " L " é o comprimento da reta que une os nós extremos deste elemento.

Observa-se quando " $\bar{r} = 1$ " ($D \geq 3,618$ na equação (2.115)), que " $\eta = \gamma$ " e " $J_2 = 1$ ", ou seja, recai-se no procedimento usual indicado na equação (2.99). Quando " $\bar{r} = 0$ " o ponto fonte está sobre o elemento sobre o qual se está integrando.

Os coeficientes de influência indicados nas expressões (2.100) e (2.101) são então obtidos por

$$\begin{aligned} h_k^e(\xi) &= \int_{-1}^{+1} p^*(\xi; w(\eta)) N_k(\eta) J_1 J_2 d\gamma = \\ &= \sum_{d=1}^{NG} p^*(\xi; w(\eta_d)) N_k(\eta_d) J_1 J_2 P(\gamma_d) \quad (2.116) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_k^e(\xi) &= \int_{-1}^{+1} u^*(\xi; w(\eta)) N_k(\eta) J_1 J_2 d\gamma = \\ &= \sum_{d=1}^{NG} u^*(\xi; w(\eta_d)) N_k(\eta_d) J_1 J_2 P(\gamma_d) \quad (2.117) \end{aligned}$$

As expressões (2.116) e (2.117) podem ser utilizadas para se efetuar todas as integrações necessárias sendo naturalmente o valor de "NG" escolhido de acordo com um critério seletivo. Neste trabalho foi adotado o indicado na referência [7].

No caso de integrações singulares em elementos contendo pontos de colocação não nodal, pode-se melhorar ainda mais a eficiência do processo de integração descrito, se o intervalo de integração for dividido em dois conforme indicado na figura 2.13, e subseqüentemente a transformação polinomial indicada em (2.102) for aplicada em cada subdivisão.

Neste caso os coeficientes de influência indicados nas expressões (2.116) e (2.117) passam a ser os seguintes (os Jacobianos " J_1 " estão definidos em "NOTAÇÃO") :

$$\begin{aligned}
 h_k^e(\xi) &= \int_{-1}^{+1} p^*(\xi; w(\eta)) N_k(\eta) |J_1| |J_2| |J_3| d\alpha + \\
 &+ \int_{-1}^{+1} p^*(\xi; w(\eta)) N_k(\eta) |J_1| |J_2| |J_4| d\beta = \\
 &\cong \sum_{d=1}^{NG} p^*(\xi; w(\eta_d)) N_k(\eta_d) |J_1| |J_2| |J_3| P(\alpha_d) + \\
 &+ \sum_{d=1}^{NG} p^*(\xi; w(\eta_d)) N_k(\eta_d) |J_1| |J_2| |J_4| P(\beta_d) \quad (2.118)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_k^e(\xi) &= \int_{-1}^{+1} u^*(\xi; w(\eta)) N_k(\eta) |J_1| |J_2| |J_3| d\alpha + \\
 &+ \int_{-1}^{+1} u^*(\xi; w(\eta)) N_k(\eta) |J_1| |J_2| |J_4| d\beta \\
 &\cong \sum_{d=1}^{NG} u^*(\xi; w(\eta_d)) N_k(\eta_d) |J_1| |J_2| |J_3| P(\alpha_d) + \\
 &+ \sum_{d=1}^{NG} u^*(\xi; w(\eta_d)) N_k(\eta_d) |J_1| |J_2| |J_4| P(\beta_d) \quad (2.119)
 \end{aligned}$$

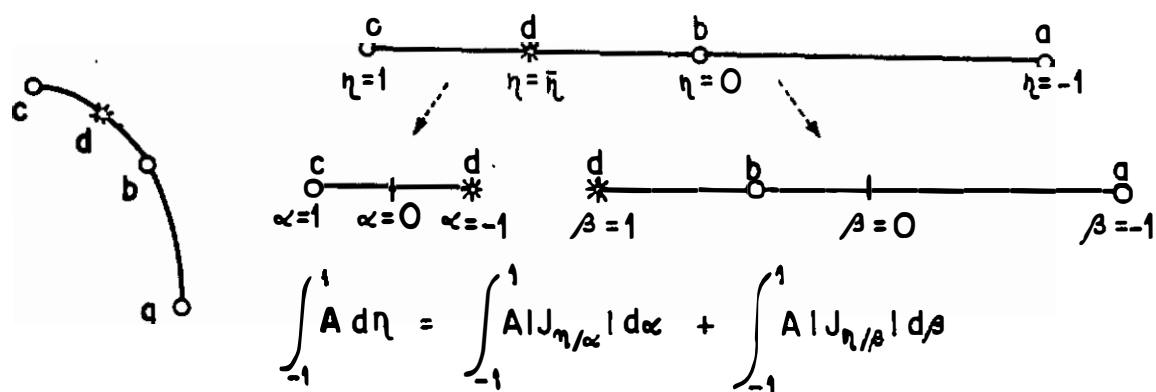


Figura 2.13 - Integração singular para elementos de colocação não-nodal. \bar{d} = ponto de colocação.

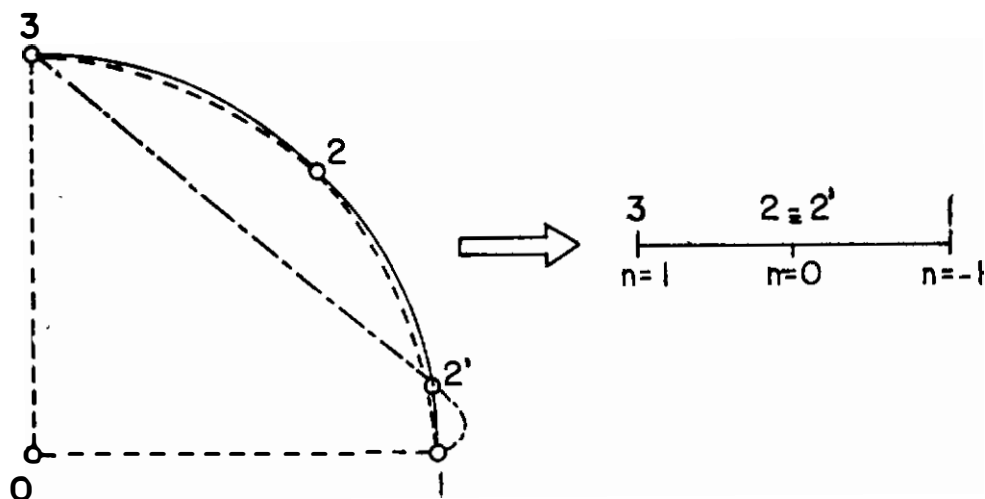


Figura 2.14 - Efeitos da posição do nó interno na representação da geometria. --- nó interno fora do centro. --- nó interno no ponto médio do arco de círculo.

2.10 Correção do Nó Central

Conforme já discutido na seção 2.8 a geometria do elemento quadrático é definida a partir de três pontos (ver figura 2.7) através das expressões (2.55) e (2.56), sendo N_1 , N_2 e N_3 as funções de forma mostradas na equação (2.54). Estas funções de forma obrigam que o nó interno (nó 2) corresponda sempre à coordenada natural " $\eta = 0$ ". Este fato pode ocasionar representações de geometria não muito suaves, isto é, o raio de curvatura pode variar muito em um mesmo elemento. Na figura 2.14 estão mostradas duas situações típicas onde se aproxima um arco de círculo pelas equações (2.55) e (2.56) a partir de três pontos. A curva mais suave corresponde à aproximação para a qual o nó interno divide o arco de círculo ao meio.

A curva correspondente ao nó interno " 2' " mostrado na figura 2.14 pode ser suavizada, bastando que não se obrigue no processo de mapeamento que o nó " 2' " corresponda a " $\eta = 0$ " e sim a uma coordenada " $\bar{\eta}$ " conforme mostrado na figura 2.15.

As coordenadas do nó interno podem ser calculadas a partir das expressões (2.55) e (2.56) particularizadas para " $\eta = \bar{\eta}$ ", ou seja :

$$x_2 = \left(1 / N_2(\bar{\eta}) \right) \left[x_2, - x_1 N_1(\bar{\eta}) - x_3 N_3(\bar{\eta}) \right] \quad (2.120)$$

$$z_2 = \left(1 / N_2(\bar{\eta}) \right) \left[z_2, - z_1 N_1(\bar{\eta}) - z_3 N_3(\bar{\eta}) \right]$$

Um esquema iterativo equivalente ao que foi mostrado acima foi empregado no programa computacional deste trabalho. Aqui então utiliza-se funções de forma N_1 , N_2 e N_3 dadas por :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{\eta^2 - \eta (\bar{\eta} + 1) + \bar{\eta}}{2 (\bar{\eta} + 1)} \\
 N_2 &= \frac{(1 + \eta) (1 - \eta)}{(1 - \bar{\eta}^2)} \\
 N_3 &= \frac{-\eta^2 + \eta (\bar{\eta} - 1) + \bar{\eta}}{2 (\bar{\eta} - 1)}
 \end{aligned}
 \tag{2.121}$$

que mapeam nós internos (2' nas figuras 2.14 e 2.15) não mais em " $\eta = 0$ " e sim em " $\eta = \bar{\eta}$ ". Este procedimento pode ser descrito pelo seguinte algoritmo :

(1) adotar " $\bar{\eta} = 0$ " e calcular " $\bar{\eta}_1 = 2 m_1 - 1$ " sendo

$$m_1 = \frac{12'}{12' + 2'3} .$$

O cálculo dos comprimentos de arcos

" 12' " e " 2'3 " são realizados com as funções

de forma contidas em (2.54). Se " $|\bar{\eta}_1| \leq \delta_1$ " o processo deve ser interrompido. " δ_1 " deve ser um número pequeno compatível com a precisão adotada e faz com que " $\bar{\eta}_1$ " fique tão próxima de zero, seu valor ideal, quanto quisermos.

(2) Adotar " $\bar{\eta} = \bar{\eta}_{1-1}$ " e calcular " $\bar{\eta}_1 = 2 m_1 - 1$ "

$$\text{sendo } m_1 = \frac{12'}{12' + 2'3} .$$

Agora os comprimentos de

arcos " 12' " e " 2'3 " são calculados com as funções de forma contidas em (2.121) .

- (3) Testar se $|\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_{1-1}| \leq \delta_2$. A tolerância " δ_2 " indica que " $\bar{\eta}_1$ ", mesmo não tendo chegado a zero, já convergiu para um certo valor.
- (4) Se (3) não for atendido retornar ao passo (2). Se (3) for atendido utilizar as expressões (2.55), (2.56) e (2.121) com " $\bar{\eta} = \bar{\eta}_1$ " e " $\eta = 0$ " para calcular as coordenadas atualizadas do novo nó " 2' ". Voltar ao passo (1).

Os dois esquemas ilustrados acima são equivalentes em termos de custo computacional e devem levar à geometrias finais próximas, sendo o primeiro deles de mais fácil implantação. Existem ainda outros esquemas de correção do nó central, por exemplo o da referência [4], cujo autor foi o primeiro a observar a necessidade dessa correção. Estes não serão discutidos aqui. É importante lembrar que seja qual for o esquema utilizado, após a correção do nó central deve-se corrigir também outras variáveis associadas a estes nós (Potencial de velocidades e Velocidade Normal no presente trabalho).

2.11 Derivada Tangencial

Para se obter a velocidade com que uma partícula situada no ponto " i " se desloca no tempo, necessário se faz calcular

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_i * nx|_i - \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_i * nz|_i \quad (2.122)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_i = \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_i * nz|_i + \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_i * nx|_i \quad (2.123)$$

onde " $nx|_i$ " e " $nz|_i$ " correspondem respectivamente aos cossenos diretores do ponto " i " .

O valor de " $\partial u / \partial n$ " é obtido no cálculo do MEC, através da resolução da equação integral (2.62) .

Será abordado agora o cálculo de " $\partial u / \partial s$ " .

Seja o contorno apresentado na figura 2.16 constituído de fronteiras Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 e Γ_4 e elementos quadráticos isoparamétricos e_1 , e_2 ... e_1 ... e_n .

A conectividade dos elementos do contorno é dada pelos vetores $no1(e_1)$, $no2(e_1)$ e $no3(e_1)$, que definem respectivamente os nós 1, 2 e 3 de um elemento genérico " e_1 " .

A derivada tangencial de cada nó de um elemento qualquer do contorno é dada por

$$\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_* = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial s} \quad (2.124)$$

onde

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \eta (u_1 - 2 u_2 + u_3) + \frac{1}{2} (u_3 - u_1) \quad (2.125)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial s} = \frac{1}{|J|} \quad (2.126)$$

$$|J| = \sqrt{ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 } \quad (2.127)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \eta (x_1 - 2 x_2 + x_3) + \frac{1}{2} (x_3 - x_1) \quad (2.128)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \eta (z_1 - 2 z_2 + z_3) + \frac{1}{2} (z_3 - z_1) \quad (2.129)$$

$\eta = -1$ para ser calculado a derivada do primeiro nó do elemento ;

$\eta = 0$ para ser calculado a derivada do segundo nó do elemento ;

$\eta = +1$ para ser calculado a derivada do terceiro nó do

elemento ;

Desta forma é obtido

$$\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{no1(e_1)}^* , \quad \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{no2(e_1)}^* \quad e \quad \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{no3(e_1)}^* .$$

Para obter o valor de $|\partial u / \partial s|_i$ no ponto " i " de uma superfície de onda periódica, conforme a figura 2.16, as seguintes regras devem ser levadas em consideração :

1. A derivada tangencial daquele nó que coincide com o nó central de um elemento não sofre alteração :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{i+1} = \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{no2(e_1)}^* \quad (2.130)$$

2. A derivada tangencial do primeiro e do último nó da superfície livre deve ser a mesma para atender a condição de periodicidade da onda, portanto :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_1 = \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_n = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{no1(e_1)}^* + \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{no3(e_n)}^* \right) \quad (2.131)$$

3. A derivada tangencial daquele nó que corresponde ao primeiro ou terceiro nó de um elemento genérico é dado pela média

$$\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_i = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{no3(e_{i-1})}^* + \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{no1(e_i)}^* \right) \quad (2.132)$$

4. A derivada tangencial daquele nó com colocação não nodal tem o mesmo valor daquele calculado dentro do elemento :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{i+2} = \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{no3(e_1)}^* \quad (2.133)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{i+3} = \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{n+1}^* \quad (2.134)$$

2.12 Rebatimento do Ponto Fonte sobre o Fundo

Quando a velocidade normal é zero em relação ao fundo (fundo impermeável) é possível evitar a discretização do mesmo (contorno " Γ_1 " mostrado na figura 2.17) através do emprego da seguinte solução fundamental (ver figura 2.17)

$$U^*(\xi;w) = u^*(\xi;w) + u^{*'}(\xi';w) \quad (2.135)$$

sendo o ponto " ξ' " tal que

$$x_{\xi'} = x_{\xi}$$

$$z_{\xi'} = -z_{\xi}$$

$$u_{\xi}(\xi;w) = (-1 / 2 \pi) \ln(r) \quad (2.136)$$

$$u_{\xi'}(\xi';w) = (-1 / 2 \pi) \ln(r') \quad (2.137)$$

Neste caso,

$$P^*(\xi;w) = \frac{\partial u^*(\xi;w)}{\partial n} + \frac{\partial u^{*'}(\xi';w)}{\partial n} = p^*(\xi;w) + p^{*'}(\xi';w) \quad (2.138)$$

sendo

$$p^*(\xi;w) = - \frac{1}{2 \pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.139)$$

$$p^{*'}(\xi';w) = - \frac{1}{2 \pi r'} \frac{\partial r'}{\partial n} \quad (2.140)$$

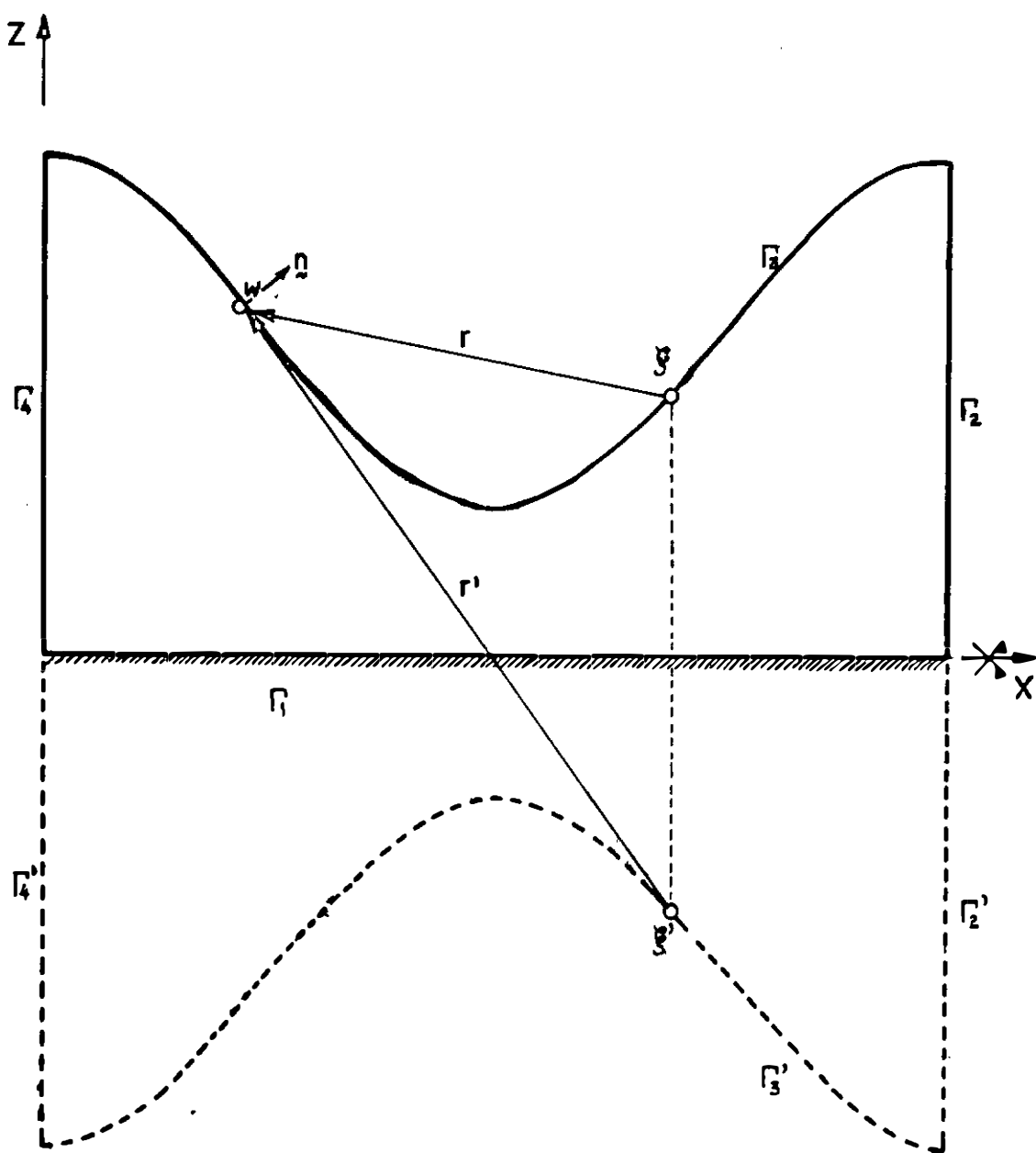


Figura 2.17 - Rebatimento do ponto fonte sobre o fundo.

$$\partial r / \partial n = \underline{r}_u \circ \underline{n} \quad \text{e} \quad \partial r' / \partial n = \underline{r}'_u \circ \underline{n} \quad (2.141)$$

Utilizando a solução fundamental " $u^*(\xi; w)$ " a equação integral (2.52) pode ser escrita como :

$$\begin{aligned} c(\xi) u(\xi) + \int_{\Gamma - \Gamma_1} P^*(\xi; w) u(w) d\Gamma(w) + \int_{\Gamma_1} P^*(\xi; w) u(w) d\Gamma(w) = \\ = \int_{\Gamma - \Gamma_1} U^*(\xi; w) p(w) d\Gamma(w) + \int_{\Gamma_1} U^*(\xi; w) p(w) d\Gamma(w) \end{aligned} \quad (2.142)$$

Como o fundo é impermeável

$$p(w) = 0, \quad w \in \Gamma_1 \quad (2.143)$$

como

$$\frac{\partial r(\xi; w)}{\partial n(w)} = - \frac{\partial r'(\xi; w)}{\partial n(w)}, \quad w \in \Gamma_1 \quad (2.144)$$

tem-se

$$P^*(\xi; w) = 0, \quad w \in \Gamma_1 \quad (2.145)$$

Em vista de (2.142) , (2.143) e (2.145) , não é necessário integrar sobre " Γ_1 " e conseqüentemente discretizar " Γ_1 " quando a solução fundamental dada na expressão (2.135) é utilizada.

2.13 Equilíbrio de Velocidade

No desenvolvimento deste trabalho foi incluída a possibilidade de forçar o equilíbrio de velocidade na solução do problema de valor de contorno, usando como base teórica a referência [15]. Quando esta opção é usada, o total de velo-

cidade que atravessa o contorno é igual a zero por hipótese e portanto não pode mais ser utilizado como medida de conservação na progressão das ondas gravitacionais . Verificou-se que esta opção não tem influência numérica significativa na solução do problema, entretanto ela é muito importante sob o ponto de vista conceitual já que mostra não ser necessário o uso do equilíbrio de velocidade como medida de precisão.

3.AVANÇO NO TEMPO

3.1 Introdução

Para resolver o Problema de Valor Inicial usando uma formulação mixto Euleriana-Lagrangeana do tipo abaixo

$$\frac{D}{Dt} \begin{bmatrix} x \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} - gz \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

a evolução da posição da superfície livre e do potencial de velocidades correspondente pode ser obtida pela resolução deste sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Um método simples de integração no tempo é o método de Euler que dá a seguinte solução àquele sistema :

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^k \\ z^{k+1} &= z^k + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^k \\ u^{k+1} &= u^k + \Delta t \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right]^k - g z^k \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde

Δt é o passo no tempo

k indica o k -ésimo passo no tempo

Uma solução mais elaborada para o sistema da expressão (3.1) pode ser encontrada pelo Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem, o qual será visto na próxima seção (3.2).

3.2 Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

O método adotado neste trabalho foi o Runge-Kutta de Quarta Ordem.

A aplicação do método inicia em um certo tempo " t_n " e em um ponto de coordenada " x_n " e " z_n " que está com um potencial de velocidades " u_n ". Essa evolução do ponto passará por 4 ciclos ou configurações.

Para o primeiro ciclo as variáveis terão o índice 1, para o segundo ciclo o índice 2, e assim por diante. A evolução, após um passo no tempo " Δt " de valor único durante os 4 ciclos, será para o tempo " t_{n+1} " e o ponto estará na coordenada " x_{n+1} " e " z_{n+1} " com um potencial de velocidades " u_{n+1} ".

Com as variáveis (x_n, z_n, u_n) no tempo " t_n " calcula-se, através da solução da equação integral pelo método dos elementos de contorno para a equação de Laplace, já vista no capítulo 2,

$$c_i u_i = \int_{\Gamma_j} u_i^* p_i d\Gamma_j - \int_{\Gamma_j} p_i^* u_i d\Gamma_j \quad (3.3)$$

a derivada $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_1$. Por meio da equação

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2}} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{1}{|J|} \quad (3.4)$$

é obtido $\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_1$. Por intermédio das equações

$$\frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial n} n_x - \frac{\partial u}{\partial s} n_z \quad (3.5)$$

$$\frac{Dz}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial n} n_z + \frac{\partial u}{\partial s} n_x \quad (3.6)$$

são obtidos as variações temporais das coordenadas " x " e

" z "

$$\frac{Dx}{Dt}\bigg|_1 \text{ e } \frac{Dz}{Dt}\bigg|_1 .$$

O cosseno diretor " n_x " e " n_z " das equações (3.5) e (3.6) foi definido na expressão (2.1) .

Entrando com os valores de $\frac{Dx}{Dt}\bigg|_1$ e $\frac{Dz}{Dt}\bigg|_1$ em

$$Dx_1 = \Delta t \frac{Dx}{Dt}\bigg|_1 (t_n, x_n) \quad (3.7)$$

$$Dz_1 = \Delta t \frac{Dz}{Dt}\bigg|_1 (t_n, x_n) \quad (3.8)$$

encontra-se o primeiro passo nas coordenadas " x " e " z " .

Aplicando a equação abaixo com $\frac{Dx}{Dt}\bigg|_1$ e $\frac{Dz}{Dt}\bigg|_1$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{Dx}{Dt} \right)^2 + \left(\frac{Dz}{Dt} \right)^2 \right] - g z - NAR \quad (3.9)$$

sendo NAR = Nível da Água em Repouso

obtém-se $\frac{Du}{Dt}\bigg|_1$. Com este valor e a equação abaixo

$$Du_1 = \Delta t \frac{Du}{Dt}\bigg|_1 (t_n, x_n) \quad (3.10)$$

encontramos o primeiro passo do potencial de velocidades " u " . Aqui termina o primeiro ciclo.

Com as coordenadas (x_n, z_n, u_n) avançando

respectivamente $\left(\frac{Dx_1}{2}, \frac{Dz_1}{2}, \frac{Du_1}{2} \right)$ entramos novamente na equação integral (3.3) para encontrar a velocidade normal

$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_2$. Por meio da equação (3.4) é obtida a velocidade

tangente $\frac{\partial u}{\partial s} \Big|_2$. Com as equações (3.5) e (3.6)

calcula-se as derivadas $\frac{Dx}{Dt} \Big|_2$ e $\frac{Dz}{Dt} \Big|_2$. Com estes

valores entra-se nas equações abaixo

$$Dx_2 = \Delta t \frac{Dx}{Dt} \Big|_2 \left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{Dx_1}{2} \right) \quad (3.11)$$

$$Dz_2 = \Delta t \frac{Dz}{Dt} \Big|_2 \left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, z_n + \frac{Dz_1}{2} \right) \quad (3.12)$$

para encontrar o segundo passo das coordenadas "x" e "z".

Com $\frac{Dx}{Dt} \Big|_2$ e $\frac{Dz}{Dt} \Big|_2$ entra-se na equação

(3.9), obtém-se $\frac{Du}{Dt} \Big|_2$ e junto com a equação abaixo

$$Du_2 = \Delta t \frac{Du}{Dt} \Big|_2 \left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, u_n + \frac{Du_1}{2} \right) \quad (3.13)$$

encontra-se o segundo passo do potencial de velocidades. Aqui termina o segundo ciclo.

Com as coordenadas (x_n, z_n, u_n) avançando

respectivamente $\left(\frac{Dx_2}{2}, \frac{Dz_2}{2}, \frac{Du_2}{2} \right)$ entra-se novamente na equação integral (3.3) para encontrar a velocidade normal

$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_3$. Por meio da equação (3.4) obtém-se a velocidade

tangente $\frac{\partial u}{\partial s}\bigg|_3$. Com as equações (3.5) e (3.6)

calcula-se as derivadas $\frac{Dx}{Dt}\bigg|_3$ e $\frac{Dz}{Dt}\bigg|_3$. Com estes

valores entra-se nas equações (3.14) e (3.15)

$$Dx_3 = \Delta t \frac{Dx}{Dt}\bigg|_3 \left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{Dx}{2} \right) \quad (3.14)$$

$$Dz_3 = \Delta t \frac{Dz}{Dt}\bigg|_3 \left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, z_n + \frac{Dz}{2} \right) \quad (3.15)$$

para encontrar o terceiro passo das coordenadas "x" e "z".

Com $\frac{Dx}{Dt}\bigg|_3$ e $\frac{Dz}{Dt}\bigg|_3$ entra-se na equação

(3.9), obtém-se $\frac{Du}{Dt}\bigg|_3$ e com junto com a equação abaixo

$$Du_3 = \Delta t \frac{Du}{Dt}\bigg|_3 \left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, u_n + \frac{Du}{2} \right) \quad (3.16)$$

encontra-se o terceiro passo do potencial de velocidades. Aqui termina o terceiro ciclo.

Entrando no quarto e último ciclo com as coordenadas (x_n, z_n, u_n) avançando respectivamente (Dx_3, Dz_3, Du_3) aplica-se a equação integral (3.3) para obter a velocidade

normal $\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_4$. Através da equação (3.4) é obtida a

velocidade tangente $\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_4$. Com as equações (3.5) e (3.6)

calcula-se as derivadas $\left. \frac{Dx}{Dt} \right|_4$ e $\left. \frac{Dz}{Dt} \right|_4$. Com estes

valores entra-se nas equações (3.17) e (3.18)

$$Dx_4 = \Delta t \left. \frac{Dx}{Dt} \right|_4 \left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + Dx_3 \right) \quad (3.17)$$

$$Dz_4 = \Delta t \left. \frac{Dz}{Dt} \right|_4 \left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, z_n + Dz_3 \right) \quad (3.18)$$

para encontrar o quarto passo no avanço das coordenadas "x"

e "z" . Com a equação (3.9) obtém-se $\left. \frac{Du}{Dt} \right|_4$ e com este valor entra-se na equação (3.19)

$$Du_4 = \Delta t \left. \frac{Du}{Dt} \right|_4 \left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, u_n + Du_3 \right) \quad (3.19)$$

obtendo então o quarto passo do potencial de velocidades " u ". Aqui termina o quarto ciclo e inicia a conclusão.

Neste ponto é possível usar as seguintes equações

$$x_{n+1} = x_n + \frac{Dx_1}{6} + \frac{Dx_2}{3} + \frac{Dx_3}{3} + \frac{Dx_4}{6} \quad (3.20)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{Dz_1}{6} + \frac{Dz_2}{3} + \frac{Dz_3}{3} + \frac{Dz_4}{6} \quad (3.21)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{Du_1}{6} + \frac{Du_2}{3} + \frac{Du_3}{3} + \frac{Du_4}{6} \quad (3.22)$$

para obter o avanço real no tempo.

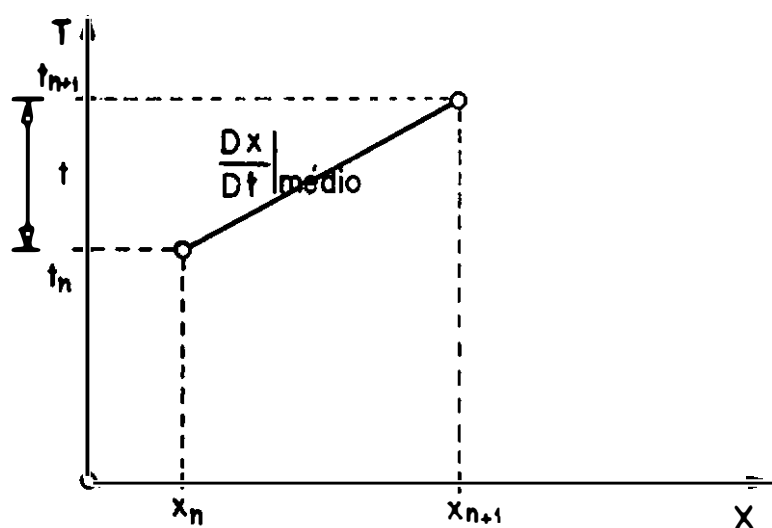
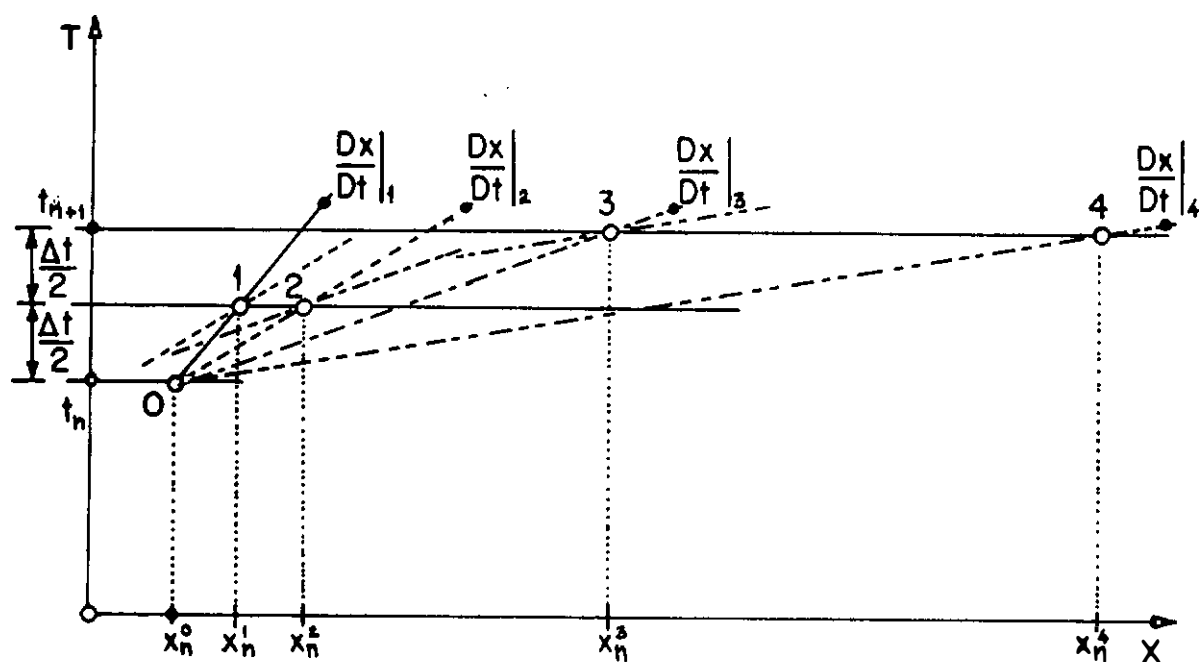


Figura 3.1- Representação geométrica do avanço no tempo pelo Método de Runge-Kutta de 4º ordem.

O caminho usado na referência [4] e neste trabalho foi calcular a variação média de " u " com respeito a normal, a tangente e ao tempo pelas equações

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\text{medio}} = \frac{\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_1}{6} + \frac{\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_2}{3} + \frac{\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_3}{3} + \frac{\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_4}{6} \quad (3.23)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{\text{medio}} = \frac{\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_1}{6} + \frac{\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_2}{3} + \frac{\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_3}{3} + \frac{\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_4}{6} \quad (3.24)$$

$$\left. \frac{Du}{Dt} \right|_{\text{medio}} = \frac{\left. \frac{Du}{Dt} \right|_1}{6} + \frac{\left. \frac{Du}{Dt} \right|_2}{3} + \frac{\left. \frac{Du}{Dt} \right|_3}{3} + \frac{\left. \frac{Du}{Dt} \right|_4}{6} \quad (3.25)$$

e obter a variação média de " x " e " z " em relação ao tempo com o uso das equações (3.23) e (3.24) nas expressões abaixo

$$\left. \frac{Dx}{Dt} \right|_{\text{medio}} = \frac{\partial u}{\partial x} = \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\text{medio}} \cdot n_x - \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{\text{medio}} \cdot n_z \quad (3.26)$$

$$\left. \frac{Dz}{Dt} \right|_{\text{medio}} = \frac{\partial u}{\partial z} = \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\text{medio}} \cdot n_z - \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{\text{medio}} \cdot n_x \quad (3.27)$$

onde " n_x " e " n_z " são os cossenos diretores da primeira configuração.

Para atualizar as coordenadas (x_n, z_n, u_n) calcula-se então

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \left. \frac{Dx}{Dt} \right|_{\text{medio}} \quad (3.28)$$

$$z_{n+1} = z_n + \Delta t \left. \frac{Dz}{Dt} \right|_{\text{medio}} \quad (3.29)$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \left. \frac{Du}{Dt} \right|_{\text{medio}} \quad (3.30)$$

A figura 3.1 representa graficamente esta apresentação com respeito ao avanço da coordenada " x " , podendo o mesmo processo ser repetido para a coordenada " z " e o potencial de velocidades " u " .

3.3 Variação do Passo no Tempo

A amplitude do passo no tempo " Δt " adotado no início da resolução do problema tem muita influência nos resultados que serão obtidos na integração no tempo .

Para estudo da propagação de ondas foram adotados três casos em relação a variável " Δt " . Todos sinalizados através de variáveis lidas no arquivo de entrada do programa no início da operação.

O primeiro implica em não haver nenhuma mudança no " Δt " independente de qualquer resultado obtido .

O segundo autoriza , ou não, que a cada passo no tempo " Δt " assuma um valor fornecido pelo monitor do programa . Este valor pode ser maior ou menor que o anterior dependendo das conveniências e deve estar registrado em um arquivo, para que o computador possa lê-lo a cada "loop" no tempo .

O terceiro autoriza o programa a automaticamente reduzir o " Δt " a 90% do seu valor cada vez que uma das expressões abaixo seja verdadeira :

$$100,0 * \frac{nma(\text{tempo}(i)) - nma(\text{tempo}(i-1))}{nma(\text{tempo}(i-1))} > \% (\Delta nma)_{\text{max}} \quad (3.31)$$

$$100,0 * \frac{et(tempo(i)) - et(tempo(i-1))}{et(tempo(i-1))} > \% (\Delta et)_{\max} \quad (3.32)$$

sendo

$\%(\Delta nma)_{\max}$ e $\%(\Delta et)_{\max}$ limites de variação máxima do nível médio da água e da energia total, respectivamente . São dados fornecidos no arquivo de entrada do programa, ao iniciar a operação . Seus valores variam entre 0,0 e 100,0 .

A velocidade também pode ser usada como um novo parâmetro para estimar valores de " Δt ", porém isto não foi feito neste trabalho. Todos os critérios para este fim devem ser objeto de estudo mais aprofundado .

4 . ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

4.1 Introdução

Em 1904 Prandtl desenvolveu o conceito de camada limite. Esse conceito fornece uma ligação importante entre escoamento de fluido perfeito e de fluido real. Escreveu ele que " para fluidos de viscosidade relativamente pequena, o efeito do atrito interno é apreciável somente numa região estreita contornando as fronteiras do fluido ". Desta hipótese, o escoamento externo à região estreita perto das fronteiras sólidas pode ser considerado como ideal ou potencial. Para escoamentos de fluido incompressível, nos quais a camada limite se mantém delgada, os resultados obtidos com fluido perfeito podem ser aplicáveis aos escoamentos de fluido real com um grau de aproximação satisfatório.

Um escoamento de fluido perfeito deve obedecer as seguintes condições :

1. Equação da Continuidade (condição de INCOMPRESSIBILIDADE do fluido) :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

2. A Segunda Lei de Newton do movimento em todos os pontos e em todos os instantes.
3. Não haver nem penetração (hipótese da IMPENETRABILIDADE) nem formação de espaços vazios entre o fluido e uma fronteira sólida.

Se, além das condições 1, 2 e 3, for feita a hipótese do movimento ser IRROTACIONAL, o movimento resultante assemelha-se bastante ao de um fluido real de baixa viscosidade externamente à camada limite.

Usando as condições acima, a aplicação da segunda lei de Newton a uma partícula de fluido conduz à equação de Euler que, juntamente com a hipótese de movimento irrotacional, pode ser integrada para se obter a equação de Bernoulli.

4.2 Equação de Bernoulli

Aplicando a Segunda Lei de Newton a um elemento de fluido infinitesimal de largura unitária, como mostra a figura 4.1, na direção X, tem-se

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dz + f_x \rho dx dz = \rho a_x dx dz \quad (4.2)$$

sendo

p = pressão agindo sobre a face normal ao eixo "X"

f_x = força de corpo por unidade de massa na direção "X"

ρ = massa específica de fluido, aqui considerada constante

a_x = aceleração do elemento infinitesimal na direção "X"

Dividindo a equação (4.2) por um volume infinitesimal de largura unitária " dx dz " obtém-se a equação do movimento na direção " X "

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho a_x \quad (4.3)$$

e de modo semelhante a equação do movimento na direção "Z"

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z = \rho a_z \quad (4.4)$$

As expressões (4.3) e (4.4) são também conhecidas como a "Lei de Newton de Conservação de Momentum".

A força de corpo agindo sobre uma partícula, neste estudo, é a conhecida gravidade terrestre, para a qual adota-se o sentido negativo do eixo " Z ". Para estudar o movimento de onda tipo "sloshing" em tanques haveria ainda a necessidade de acrescentar as acelerações do tanque nas direções " X " e " Z " (ver referência [4]).

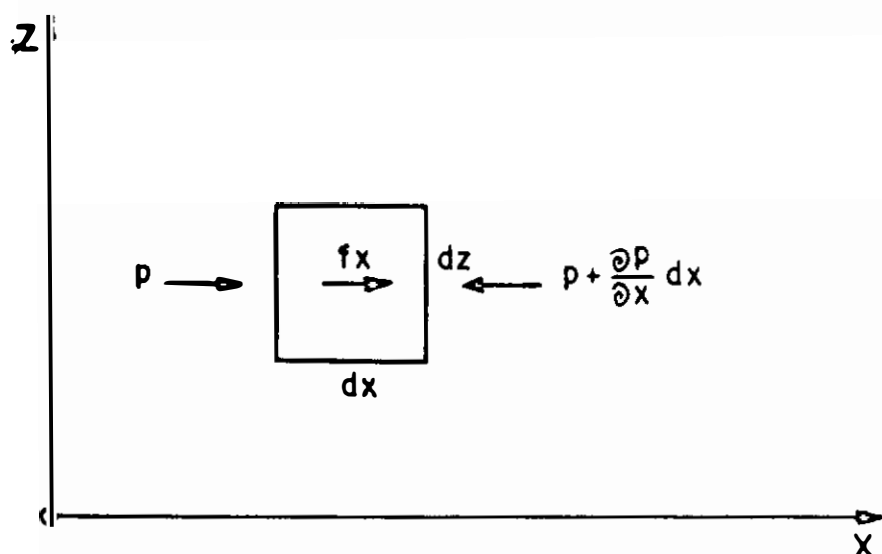


Figura 4.1 - Pressão agindo sobre um elemento de fluido de largura unitária.

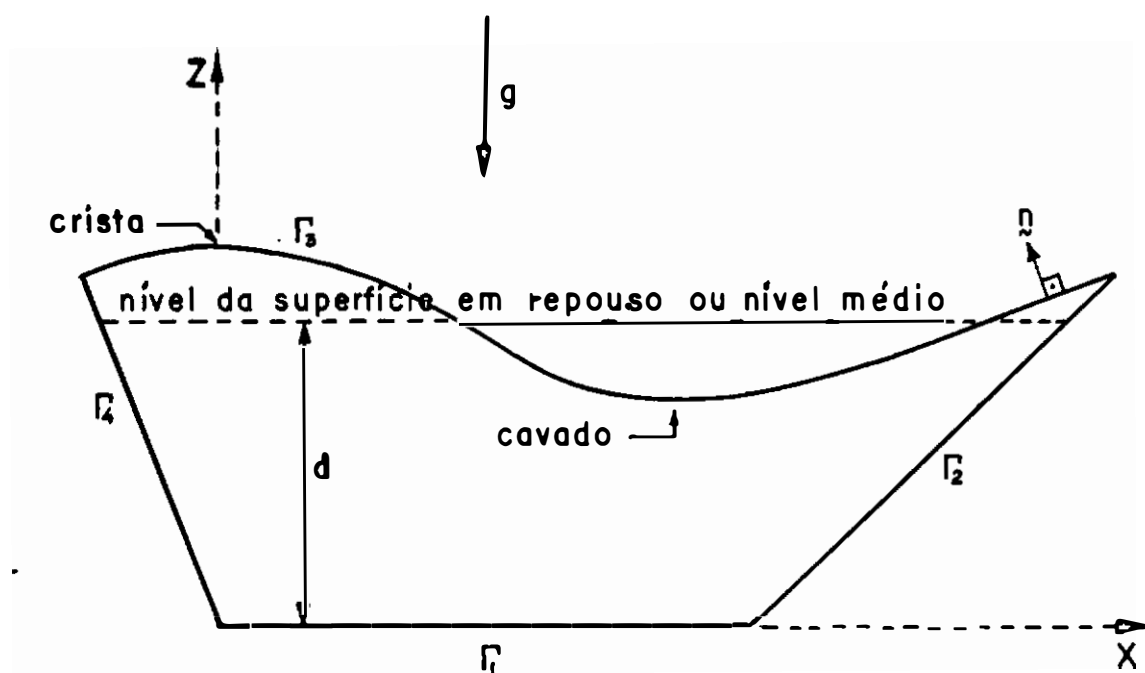


Figura 4.2 - Descrição geométrica de um problema de escoamento de fluido em uma região " Ω " circundada pelo contorno $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.

A derivada material aplicada às velocidades nas direções " x " e " z " fornece

$$a_x = \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (4.5)$$

$$a_z = \frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (4.6)$$

As equações (4.3) e (4.4) estão na forma Lagrangeana. Dividindo-as por " ρ " e substituindo " a_x " e " a_z " pelas equações (4.5) e (4.6) obtém-se as equações de Euler

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (4.7)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (4.8)$$

as quais governam o escoamento de um fluido não viscoso e incompressível.

Neste estudo de onda na água o escoamento é considerado irrotacional, ou seja,

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \quad (4.9)$$

o que permite afirmar a existência de uma função POTENCIAL DE VELOCIDADE " u " assim definida

$$\frac{\partial u}{\partial s} = v_s \quad (4.10)$$

tal que sua derivada em relação a qualquer direção é a componente da velocidade nessa direção, a menos do sinal.

Exemplo :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v_x \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = v_z \quad (4.11)$$

Pode-se integrar as equações de Euler (4.7) e (4.8) após substituição de " v_x " e " v_z " por seus valores derivados do potencial de velocidade em (4.11) obtendo desta forma a equação de Bernoulli

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} - f_x x - f_z z = C \quad (4.12)$$

onde

f_x = zero

f_z = aceleração da gravidade ($-g$)

C = constante de integração, que pode ser considerada igual a zero, sem causar efeito no movimento do fluido. Neste trabalho $C = \text{zero}$.

Substituindo " $\frac{\partial u}{\partial t}$ " da equação (4.12) na derivada material do potencial de velocidade " u " dado na equação (4.13) abaixo

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad (4.13)$$

obtemos a Equação de Bernoulli na forma Lagrangeana

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{p}{\rho} + f_x x + f_z z \quad (4.14)$$

Neste estudo não foi introduzido um termo de perda de carga devido a viscosidade " $-\mu u$ " à direita da equação (4.14) como algumas vezes é feito por motivo de que aqui ele não é expressivo.

4.3 Equação de Laplace

Substituindo as equações da velocidade em um campo potencial (4.11) na equação da continuidade (4.1) obtém-se a Equação de Laplace

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (4.15)$$

Qualquer função " u " que satisfaça a equação de Laplace representa um movimento irrotacional possível. Como há um número infinito de soluções da equação de Laplace, cada qual satisfazendo certas condições de contorno, o principal problema é determinar a função apropriada a cada escoamento em particular.

4.4 Condições de Contorno do Escoamento de Fluido

Para que a resolução de um problema de escoamento de fluido transiente regida pela equação de Laplace apresente uma solução única é necessário definir as condições de contorno. Estas são as condições cinemáticas, que definem a geometria do movimento, e as condições dinâmicas que estabelecem as causas do movimento.

Neste trabalho a geometria típica que contorna o fluido terá as características vistas na figura 4.2 .

4.4.1 Condições de Contorno Cinemáticas

Atendendo a hipótese de impenetrabilidade prevista para o escoamento de um fluido perfeito na seção 4.1, devemos ter em uma fronteira sólida " Γ_1 " uma velocidade

normal

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (4.16)$$

Mais a frente esta condição será aplicada em " Γ_1 " da figura 4.2 ao ser desenvolvida uma onda linear.

As fronteiras " Γ_2 " e " Γ_4 " não são paredes quando usamos o artifício de truncagem da onda em um comprimento de onda e as condições de contorno são tais que :

1. O Potencial de velocidades em " Γ_2 " é igual ao de " Γ_4 " ;

2. A velocidade normal em " Γ_2 " é igual a de " Γ_4 " com o sinal trocado ;

As fronteiras " Γ_2 " e " Γ_4 " podem ser paredes se for aplicado o problema a um batedor de ondas.

A superfície " Γ_3 " é livre contato entre a água e o ar.

Na superfície " Γ_3 " , desprezando o termo convectivo não linear (ver Azevedo [4]) obtém-se as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \frac{Dx}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{Dz}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.17)$$

A condição (4.17) informa que as partículas da superfície permanecem na superfície ao longo do tempo, garantindo que o acompanhamento destas partículas permita atualizar a posição da superfície livre ao longo do tempo e conseqüentemente do restante do domínio de fluido (ver Fabrício [5]).

4.4.2 Condição de Contorno Dinâmica

A condição de contorno dinâmica é dada pela equação de Bernoulli, dada na expressão (4.14). Como a única força de corpo atuante é a gravidade assume-se que " $f_x = 0$ " e " $f_z = -g$ " obtendo-se então

$$\frac{p}{\rho} + g z + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (4.18)$$

Considerando-se que a pressão atmosférica atuará por igual na superfície " Γ_3 " da figura 4.2, não alterando os valores da velocidade das partículas, adotar-se-á neste trabalho " $p = 0$ ", fazendo com que a condição de contorno dinâmica fique igual a

$$g z + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (4.19)$$

Observa-se que esta condição de contorno não é linear por dois motivos :

1. Os termos da velocidade estão elevados ao quadrado;
2. A cota " z " da superfície livre depende do potencial de velocidades " u " e este ainda não é conhecido;

4.5 Energia Potencial

A energia potencial de uma coluna infinitesimal de água em relação ao nível de água em repouso (ver figura 5.1) é igual ao trabalho que a massa dessa coluna, concentrada no seu centro de gravidade, executaria para se deslocar do centro de gravidade ao nível de referência .

$$\text{Energia Potencial} = \text{Trabalho} = \text{Massa} \times \text{Aceleração} \times \text{Espaço}$$

$$dE_p = dm \, g \, \frac{\zeta}{2} = (\zeta \, dx \, \rho) \, g \, \frac{\zeta}{2} = \frac{1}{2} \, \rho \, g \, \zeta^2 \, dx \quad (4.20)$$

A contribuição dessa energia elementar ao longo de um comprimento de onda " λ " seria

$$E_p = \frac{\rho \, g}{2} \int_0^\lambda \zeta^2 \, dx \quad (4.21)$$

A energia potencial de uma onda linear pode ser obtida por [4] :

$$E_p = \frac{\rho \, g \, a^2 \, \lambda}{4} \quad (4.22)$$

A energia potencial de uma onda qualquer pode ser normalizada pela energia potencial de uma onda linear dividindo a primeira pela segunda

$$\left(E_p \right)_n = \frac{2}{a^2 \, \lambda} \int_0^\lambda \zeta^2 \, dx \quad (4.23)$$

Em unidades adimensionais a equação (4.23) fica

$$\left(E_p \right)_{na} = \frac{2}{a^2} \int_0^1 \zeta^2 \, dx \quad (4.24)$$

4.6 Energia Cinética

A energia cinética de uma massa infinitesimal de fluido vista na figura 5.1 movendo-se a uma velocidade " y " em relação ao fundo fixo é dado por [4]

$$dE_c = \frac{1}{2} dm \underline{v}^2 = \frac{1}{2} \rho dx dz \underline{v}^2 \quad (4.25)$$

Para um fluido irrotacional essa expressão pode ser reescrita em termos do potencial de velocidades " u " e integrada sobre um domínio discretizado " Ω ". Dará , para um comprimento de onda " λ " , a seguinte expressão para a energia cinética :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} (\nabla u)^2 d\Omega \quad (4.26)$$

Usando a primeira identidade de Green e considerando o escoamento regido pela Equação de Laplace [4] a energia cinética pode ser obtida por :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \oint_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \quad (4.27)$$

A energia cinética e a energia potencial de uma onda linear são dadas pela mesma expressão :

$$E_c = E_p = \frac{\rho g a^2 \lambda}{4} \quad (4.28)$$

A energia cinética de uma onda pode ser normalizada pela energia cinética de uma onda linear dividindo a primeira pela segunda

$$(E_c)_n = \frac{2}{a^2 g \lambda} \oint_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \quad (4.29)$$

Escolhendo a aceleração da gravidade como uma aceleração característica e o comprimento de onda como um comprimento característico pode-se obter para a expressão (4.29) a energia cinética normalizada em unidades adimensionais

$$(E_c)_{na} = \frac{2}{a^2} \oint_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \quad (4.30)$$

4.6 Energia Total

A energia total é simplesmente a soma da Energia Potencial com a Energia Cinética

$$(E_t)_{na} = (E_p)_{na} + (E_c)_{na} \quad (4.31)$$

4.7 Nível Médio da Água

O Nível Médio da Água deve permanecer constante em qualquer tempo para um fluido incompressível. Encontra-se seu valor calculando a área do domínio dentro de um comprimento de onda e dividindo este por um comprimento de onda (ver figura 5.1)

$$\eta_{ma} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} z \, dx \quad (4.32)$$

A integral de (4.32), no programa base desta tese, foi realizada por Quadratura de Gauss, percorrendo a linha de superfície por um comprimento de onda .

5. ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS DE ONDAS GRAVITACIONAIS

5.1 Introdução

Ondas de gravidade ou "water waves", de acordo com Le Mehauté [9], são movimentos não estacionários de fluido em presença de superfície livre sujeitos a ação de forças gravitacionais.

Diz-se que uma onda é progressiva quando seu perfil movimenta-se horizontalmente em relação a um referencial fixo. Exemplo : Onda solitária . Caso contrário é chamada de onda estacionária. Exemplo : "sloshing" em tanques (ver Azevedo [4]).

As partículas de água movem-se normalmente diferentemente do perfil da onda. Considerando o movimento da onda em um plano diz-se que a onda é longitudinal se a partícula move-se só horizontalmente e transversal quando as partículas movem-se só verticalmente. Para ondas oceânicas de superfície com pequena amplitude e grandes profundidades o movimento das partículas é elíptico.

Como visto na seção 4.4.2 o tratamento analítico da onda é muito difícil, a menos que se adote hipóteses simplificadoras.

Diferentes simplificações da teoria de onda foram desenvolvidas possibilitando a análise do fenômeno.

As hipóteses simplificadoras mais usadas assumem que a onda é bidimensional, periódica no tempo e no espaço e o nível da água em repouso é constante . Estas considerações fazem com que o perfil da onda permaneça imutável para um observador que viaje com a mesma velocidade (celeridade) da onda.

O estudo da onda envolve o cálculo de três incógnitas: a elevação da superfície livre, o campo de velocidades e o campo de pressões.

Há três parâmetros da onda que informam a importância da aceleração convectiva em relação a aceleração local e da inclinação da superfície livre, isto é, indicarão a importância dos termos não lineares. Estes são :

H = altura da onda
 λ = comprimento da onda
 d = profundidade local

Em águas profundas, pequenos " H/d " e " λ/d ", o parâmetro mais significativo é " H/λ ", que é chamado declividade da onda. Em águas rasas a altura relativa " H/d " torna-se o principal parâmetro.

Entre estas duas configurações tem-se o que se chama de águas intermediárias. Neste caso o parâmetro mais significativo é o número de Ursell " $(H\lambda^2) / d^3$ ".

De acordo com as relações " H/λ ", " H/d " e " λ/d " distingue-se três métodos de soluções : através da linearização do problema, da utilização de séries de potência (ver referência [10]) e métodos numéricos.

O presente trabalho aborda a solução do problema através de métodos numéricos.

5.2 Onda Linear

Aqui os termos devidos à aceleração convectiva e à inclinação do perfil da onda são desprezíveis. Esta teoria representa bem uma onda de pequena amplitude e pequeno comprimento de onda em águas profundas, ou seja, pequenos " H/λ ", " H/d " e " λ/d ". Na prática ela representa corretamente o fenômeno físico para " $H/\lambda < 0,02$ ".

Neste caso a formulação do problema é dada por :

$$\nabla^2 u(x, z, t) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{em} \quad z = d \quad (5.2)$$

$$g\zeta + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{em} \quad z = d \quad (5.3)$$

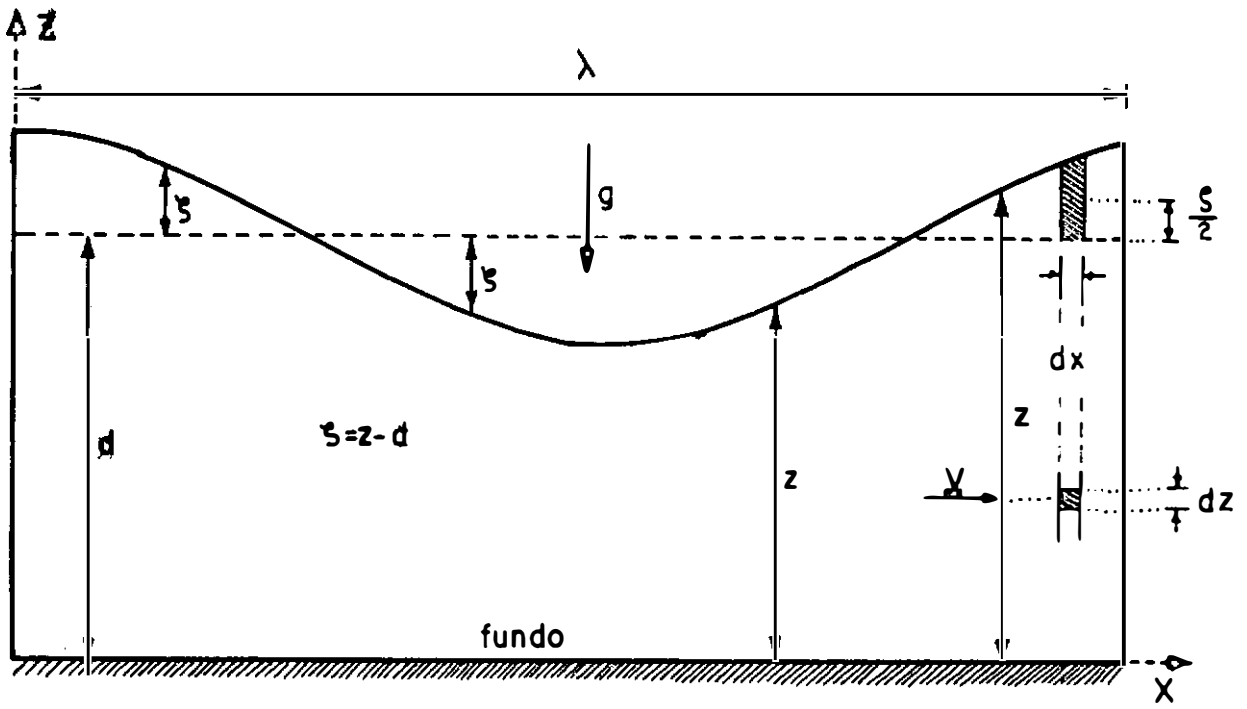


Figura 5.1 - Representação de um período de onda linear.

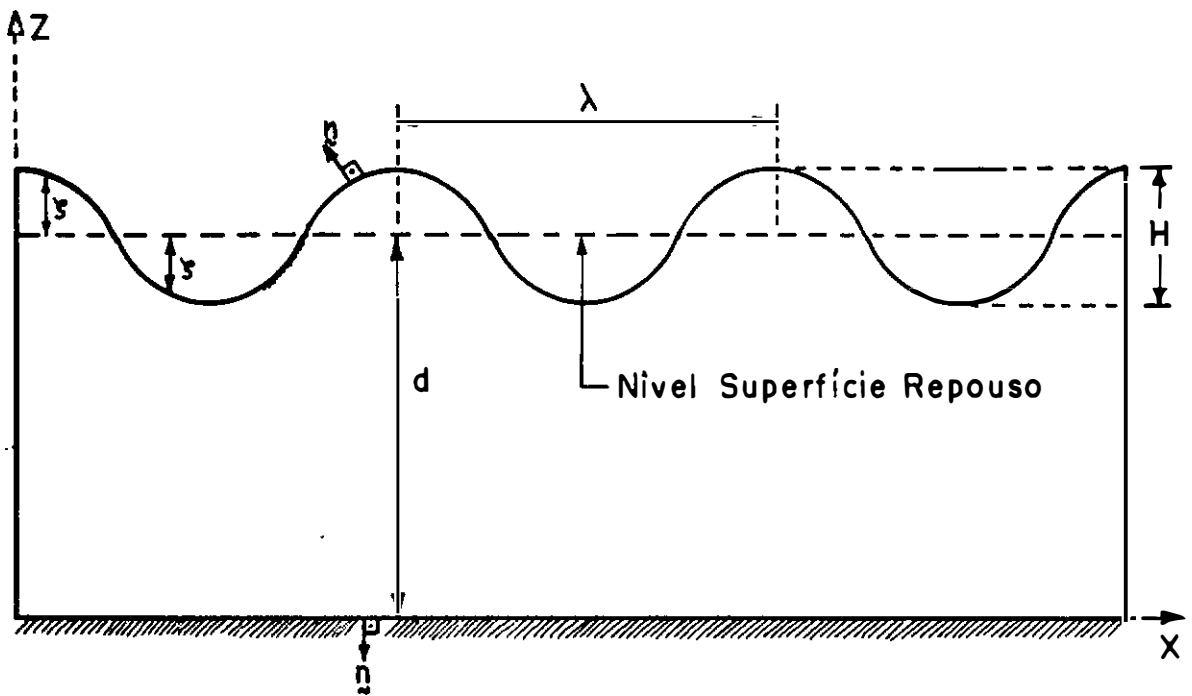


Figura 5.2 - Onda Linear Progressiva.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{em} \quad z = 0 \quad (5.4)$$

onde $\zeta = z - d$.

As condições cinemáticas e dinâmicas poderão ser fundidas numa única equação (5.5) se for derivada a equação (5.3) em relação ao tempo e se nela for substituída

" $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ " da expressão (5.2) :

$$g \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{em} \quad z = d \quad (5.5)$$

5.3 Ondas Progressivas

Uma solução geral para a Equação de Laplace (5.1), satisfazendo as condições de contorno da superfície livre (5.5) e do fundo (5.4), pode ser obtida se for considerada a onda periódica e se for aplicada a solução por separação de variáveis. Assim é encontrada a formulação do potencial de velocidades

$$u = \frac{a g}{W} \frac{\cosh (k z)}{\cosh (k d)} \sin (k x - W t) \quad (5.6)$$

e da cota da superfície livre

$$z = d + \zeta \quad \text{onde} \quad \zeta = a \cos (k x - W t) \quad (5.7)$$

Maiores detalhes sobre esta dedução podem ser obtidos em Azevedo [4].

As variáveis em apreço podem ser reconhecidas na figura 5.2 e são assim definidas :

d = nível da água em repouso. Assume-se constante ;

H = distância vertical entre a crista e o cavado da onda ;

a = semi-amplitude ; distância entre a crista e o nível da água em repouso. Para a onda linear é " $H/2$ " ;

λ = comprimento de onda, ou seja, a distância horizontal entre duas sucessivas cristas de onda

τ = período de onda ou o intervalo de tempo medido entre a passada de duas cristas sucessivas da onda por um ponto fixo ;

$$c = \text{celeridade da onda} = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{W}{k} \quad (5.8)$$

$$W = \frac{2 \pi}{\tau} \quad (5.9)$$

frequência angular, variável usada por ser mais conveniente que " τ " ;

$$k = \frac{2 \pi}{\lambda}, \text{ número de onda, variável usada por ser mais conveniente que } "\lambda" ;$$

$$\theta = k x - W t \quad (5.10)$$

ângulo de fase ;

Assume-se também nesta teoria que não há nenhum corpo no fluido.

Como essas ondas progridem com a celeridade " c " e são de forma permanente podemos substituir a variável " x " por " $x - ct$ " onde " t " é o tempo que as outras variáveis responderão com um único valor.

Substituindo a equação (5.6) na equação (5.5) o potencial está sendo forçado a satisfazer as condições cinemáticas e dinâmicas da superfície livre em " $z = d$ " e assim é obtida a relação de dispersão (W) linear para ondas bidimensionais em águas de profundidade constante

$$W^2 = g k \tanh (k d) \quad (5.11)$$

Dependendo do valor da profundidade relativa " d/λ " é possível fazer certas simplificações baseadas no comportamento assintótico da função " \tanh " . Costuma-se então montar a seguinte classificação :

1. Ondas em águas rasas : $d/\lambda < 0.05$
2. Ondas em águas intermediárias : $0.05 < d/\lambda < 0.5$
3. Ondas em águas profundas : $d/\lambda > 0.5$

5.4 Ondas em Águas Intermediárias

As expressões obtidas na seção 5.2 devem ser usadas sem simplificações para águas intermediárias.

As componentes da velocidade da partícula

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e \quad v_z = \frac{\partial u}{\partial z}$$

podem ser obtidas derivando o potencial de velocidades (equação (5.6))

$$v_x = \frac{a g}{W} \frac{\cosh (k z)}{\cosh (k d)} \cos (k x - W t) \quad (5.12)$$

$$v_z = \frac{a g}{W} \frac{\sinh (k z)}{\sinh (k d)} \sin (k x - W t) \quad (5.13)$$

5.5 Ondas em Águas Profundas

Para profundidades de água (d) maiores que a metade do comprimento de onda a influência do fundo sobre a onda é desprezível e expressões de profundidade infinita podem ser usadas

$$\sinh (k d) \cong \cosh (k d) \cong \frac{e^{k d}}{2} \quad (5.14)$$

$$\tanh (k d) \cong 1 \quad (5.15)$$

$$\frac{\cosh (k z)}{\cosh (k d)} \cong \frac{\sinh (k z)}{\sinh (k d)} \cong e^{k (z - d)} = e^{k \zeta} \quad (5.16)$$

$$\frac{\cosh (k z)}{\sinh (k d)} \cong e^{k (z - d)} = e^{k \zeta} \quad (5.17)$$

Substituindo a equação (5.16) em (5.6) obtemos o potencial de velocidades em águas profundas

$$u = \frac{a g}{W} e^{k (z - d)} \sin (k x - W t) \quad (5.18)$$

A elevação da superfície livre continua a mesma, ou seja

$$z = d + \zeta \quad \text{onde} \quad \zeta = a \cos (k x - W t) \quad (5.19)$$

Substituindo a equação (5.15) na equação (5.11) obtemos a relação de dispersão (W) para águas profundas

$$W^2 = g k \quad (5.20)$$

As componentes da velocidade da partícula podem ser obtidas pela substituição das expressões (5.16) e (5.17) nas equações (5.12) e (5.13)

$$v_x = \frac{a g}{W} e^{k (z - d)} \cos (k x - W t) \quad (5.21)$$

$$v_z = \frac{a g}{W} e^{k (z - d)} \sin (k x - W t) \quad (5.22)$$

Comparando as equações (5.21) e (5.22) com a cota da superfície livre (5.19) observa-se que " v_x " é um

máximo na crista e no cavado. Na crista a velocidade é positiva, na mesma direção de propagação da onda, e na cava o escoamento é na direção oposta.

A velocidade " v_z " é máxima onde " $\zeta = 0$ ", subindo e descendo com a superfície livre.

Dentro da precisão da teoria linear, a partícula do fluido move-se em pequenos círculos orbitais proporcionais à amplitude da onda.

5.6 Ondas em Águas Rasas

Quando a profundidade relativa " d/λ " é menor que 0,05 então " kd " é menor que $\pi/10$ e podemos então fazer as seguintes simplificações nas expressões de altura intermediária :

$$\frac{\cosh (kz)}{\sinh (kd)} \cong \frac{1}{kd} \quad (5.23)$$

$$\frac{\sinh (kz)}{\sinh (kd)} \cong 1 + \frac{\zeta}{d} \quad (5.24)$$

$$\sinh (kd) \cong \tanh (kd) \cong kd \quad (5.25)$$

$$\cosh (kd) \cong 1 \quad (5.26)$$

Quando o comprimento de onda é muito maior que a altura as ondas em águas rasas são algumas vezes referidas como ondas longas.

O potencial de velocidades para águas rasas é encontrado pela substituição das expressões (5.23) a (5.26) na equação (5.6) resultando em

$$u = \frac{a g}{W} \sin (kx - Wt) \quad (5.27)$$

A elevação da superfície livre permanece a mesma

$$z = d + \zeta \quad \text{onde} \quad \zeta = a \cos (k x - W t) \quad (5.28)$$

A relação de dispersão (W), após simplificação dada pela equação (5.25), fica assim

$$W^2 = g k^2 d \quad (5.20)$$

O comprimento de onda em águas rasas é

$$\lambda = \tau \sqrt{g d} \quad (5.21)$$

o que mostra ser função do período e decresce com a altura.

As velocidades " v_x " e " v_z " das partículas são obtidas pela substituição das equações (5.23) e (5.24) nas equações (5.12) e (5.13) resultando

$$v_x = \frac{a g}{W} \cos (k x - W t) \quad (5.21)$$

$$v_z = \frac{a g}{W} \left(1 + \frac{\zeta}{d} \right) \sin (k x - W t) \quad (5.22)$$

o que mostra que a velocidade horizontal é constante, enquanto a velocidade vertical decresce linearmente com o incremento de altura.

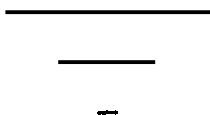
5.7 Ondas Não Lineares

A teoria da onda linear fornece uma aproximação de primeira ordem para os Problemas de Valor Inicial e de Valor de Contorno para ondas gravitacionais não lineares. Essa aproximação é aceitável para pequenas amplitudes.

Para essas ondas, a órbita das partículas é fechada e a forma do perfil da superfície é senoidal com uma única componente de frequência. A aproximação linear é aceitável

para ondas com razão " $H / \lambda < 0,02$ ". Quando este limite é ultrapassado, os efeitos não lineares são importantes, e então há necessidade de se empregar teorias não lineares ou métodos numéricos.

As teorias não lineares não serão aqui abordadas, mas três delas, conhecidas como onda de Stokes, onda Cnoidal e onda Solitária, podem ser apreciadas nas referências [4] e [10].



6 . ASPECTOS COMPUTACIONAIS

6.1 Introdução

Será visto neste capítulo quais foram os recursos computacionais em "hardware" e "software" utilizados para desenvolver o programa computacional que testou as diversas hipóteses físicas e matemáticas apresentadas ao longo deste trabalho, sobressaindo-se entre essas a Equação de Laplace, o Método dos Elementos de Contorno, a Quadratura Gaussiana, o Método de Resolução de um sistema de equações por Gauss-Jordan e o Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem .

6.2 Linguagem de Programação

Foi utilizada para o desenvolvimento desta Simulação Numérica a linguagem de programação " C " . É uma linguagem moderna e tem futuro promissor por permitir que o seu Usuário utilize recursos do mais baixo ao mais alto nível da máquina que opera.

6.3 Ambiente de Programação

O UNIX foi o ambiente de Programação utilizado para o desenvolvimento do Programa desta Simulação Numérica. Ele foi escolhido porque é o ambiente implantado na Estação SUN do Laboratório de Computação da Engenharia Civil/COPPE. Ele tem a vantagem de utilizar todos os recursos de memória do Computador no qual ele está implantado como também, sendo padronizado, permite, em princípio, migrar programas entre máquinas de diferentes fabricantes.

6.4 Equipamento Utilizado

Os equipamentos utilizados para desenvolver o programa para verificação das idéias contidas nesta tese foram as Estações SUN modelo SPARC station 1+ e 2. A SUN possui uma Unidade Central de Processamento constituída de um microprocessador 68 000 da Motorola. Acoplado a esta CPU há um Monitor de Vídeo Colorido de alta resolução.

A estação SUN está provida de excelentes programas de gerenciamento de edição como por exemplo o "Openwindow" que permite não só editar e processar vários programas ao mesmo tempo como também expor telas gráficas. Este último recurso possibilita acompanhar o desenvolvimento gráfico de um problema que esta sendo rodado. Também está implantado o "Xwindow", que é um excelente instrumento para montar gráficos.

6.5 Programação Estruturada

A programação foi dividida em um grande número de módulos de forma a ter flexibilidade e possibilitar troca de funções por outras mais otimizadas .

6.6 Recursos Gráficos

Foi desenvolvido um programa gráfico utilizando os recursos do sistema "Xwindow" para permitir ao programador acompanhar o desenvolvimento das fronteiras móveis durante a execução do programa, sem interromper sua execução.

A única dificuldade apresentada é que as Estações SUN usadas encontram-se desligadas de impressoras, o que impossibilitou anexar cópias destes gráficos neste trabalho. Os gráficos apresentados foram obtidos com o uso de um

microcomputador tipo PC, com o programa "Grapher" e uma impressora Emilia/ PC.

6.7 Tempo de Processamento

O tempo real gasto para rodar o programa em pauta, para um contorno com 40 elementos isoparamétricos quadráticos e 83 nós, foi o seguinte : 1 minuto e 32 segundos . A distribuição do tempo é a seguinte :

Montagem do Sistema de Equações Algébricas lineares 20 segundos ;
Resolução do Sistema de Equações pelo Método de Gauss-Jordan3 segundos ;
Resolução completa através do Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem	(4 X (20 + 3)) = 1 minuto e 32 segundos ;

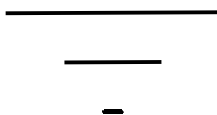
6.8 Entrada e Saída de Dados

Os diversos dados de entrada para orientação do programa estão em arquivos independentes. Desta forma o Usuário utiliza o programa sem mudar sua estrutura e sem realizar a compilação a cada troca de dados.

Os dados de saída referentes aos pontos que formam a fronteira do domínio estão dispostos de tal forma no arquivo de saída que podem ser lidos por um programa gráfico para serem desenhados na tela do video, mesmo durante a execução do programa principal. É o caso das coordenadas dos Pontos do Contorno, do Nível Médio da Água, da Energia Cinética, da Energia Potencial e da Energia Total, todos a cada nível de tempo .

6.9 Controle de Recursos Matemáticos

O Programa foi montado de forma a permitir que certas funções sejam ou não utilizadas, com orientação deste fluxo dado no arquivo de entrada de dados. Isto permite que se compare resultados obtidos com ou sem algum recurso matemático. Também possibilita a comparação de resultados deste programa com outro que possua somente um ou mais recursos aqui existente. Por exemplo, é possível que o monitor do programa escolha um número adequado de pontos para a integração de Gauss de todos os elementos ou mesmo que deixe o programa selecionar automaticamente o melhor número de pontos para a integração de cada elemento do contorno. Para conhecer como é poderosa a integração que utiliza a transformação de terceiro grau para o elemento singular basta resolver o mesmo problema com e sem esta opção. Assim pode ser feito com a correção do nó central, com a integração em dois trechos para o elemento singular, com a escolha do ponto do elemento quase-singular que esteja mais próximo do ponto de colocação e com o equilíbrio de velocidade .



7. APLICAÇÕES

7.1 Introdução

Neste capítulo serão abordados 3 tipos de problemas. O primeiro, correspondente a aplicação mais simples, tem por finalidade demonstrar o uso da ferramenta matemática desenvolvida, a solução de um Problema de Valor de Contorno através do uso do Método dos Elementos de Contorno. As diversas técnicas implementadas no programa desenvolvido estão comentadas no capítulo 2. Estes problemas com suas soluções serão descritos na seção 7.2 .

O segundo problema corresponde à verificação do funcionamento de um Problema de Condição de Contorno sucedido por um Problema de Valor Inicial, este último tendo sido solucionado pelo Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem o qual foi explanado no capítulo 3. Esta situação está montada para propagar uma onda linear e será explanada na seção 7.3 .

O terceiro problema corresponde à propagação de uma onda não linear, com procedimento semelhante ao da onda linear, porém com amplitudes crescendo para cada um dos 4 casos apresentados. Esta aplicação tem ponto máximo na verificação de uma onda rebentando. Esta aplicação será abordada na seção 7.4 .

Em todos os casos acima a evolução no tempo será considerada através de uma formulação mista Euleriana-Lagrangeana. As unidades dos problemas contidos nas seções 7.3 e 7.4 foram adimensionalizadas fazendo o comprimento de onda " λ " igual a uma unidade de comprimento, a aceleração da gravidade " g " igual a uma unidade de aceleração e a massa específica de fluido " ρ " igual a uma unidade de massa específica.

7.2 Problemas de Valor de Contorno Solucionados pelo Método dos Elementos de Contorno

Este exemplo tem um domínio quadrado com lados de 2,0 unidades de comprimento e a função potencial de velocidades prescrita " $\bar{u} = 2,0 - x$ ". Seus valores discretizados estão na tabela 7.2.1. A solução analítica da velocidade é dada por " $\partial \bar{u} / \partial x = -1,0$ e $\partial \bar{u} / \partial z = 0,0$ " e seus valores discretizados também estão na tabela 7.2.1. O contorno foi dividido em quatro elementos e não há elemento com colocação não nodal nos cantos, o que faz com que os resultados do fluxo nos cantos seja calculado por uma média entre os nós de dois elementos vizinhos. Aí a velocidade normal obtida pelo MEC apresenta diferença de até 13% da solução analítica. A tabela 7.2.1 apresenta as coordenadas dos nós, a velocidade " v " calculada analiticamente e pelo MEC e os valores das funções já citadas acima.

Tabela 7.2.1 - Problema M1 . Dados e Resultados .

(e) = esquerda; (d) = direita; (m) = média

Nó	x		z		\bar{u} (dado)
			v(analítico)		v(MEC)
1	0,0		0,0		2,0
	1,0(e)	0,0(d)	0,5(m)		0,433 097 425 469
2	1,0		0,0		1,0
			0,0		0,0
3	2,0		0,0		0,0
	0,0(e)	-1,0(d)	-0,5(m)		-0,433 097 425 469
4	2,0		1,0		0,0
			-1,0		-1,057 919 404 204
5	2,0		2,0		0,0
	-1,0(e)	0,0(d)	-0,5(m)		-0,433 097 425 469
6	1,0		2,0		1,0
			0,0		0,0
7	0,0		2,0		2,0
	0,0(e)	1,0(d)	0,5(m)		0,433 097 425 469
8	0,0		1,0		2,0
			1,0		1,057 919 404 204

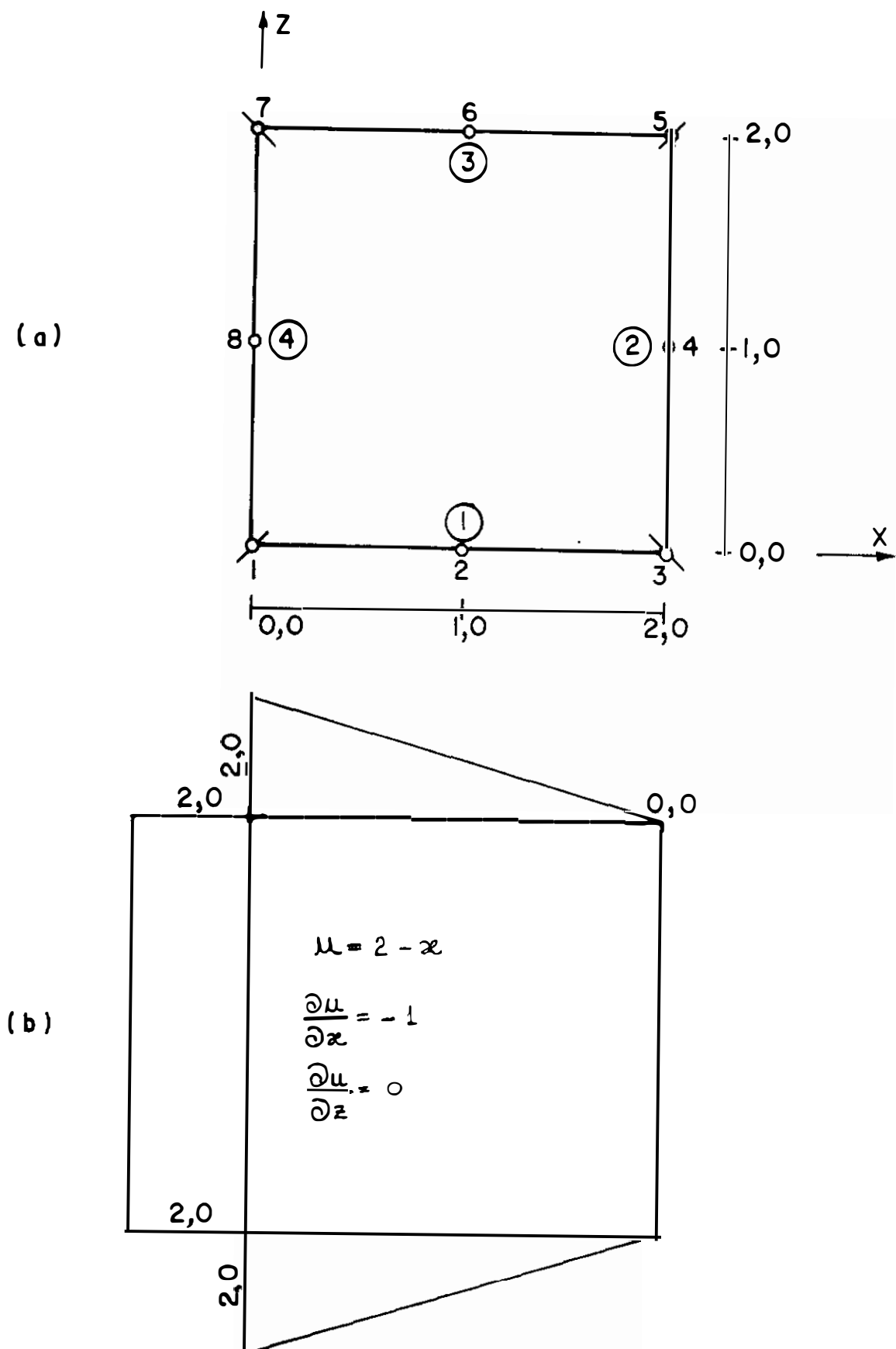
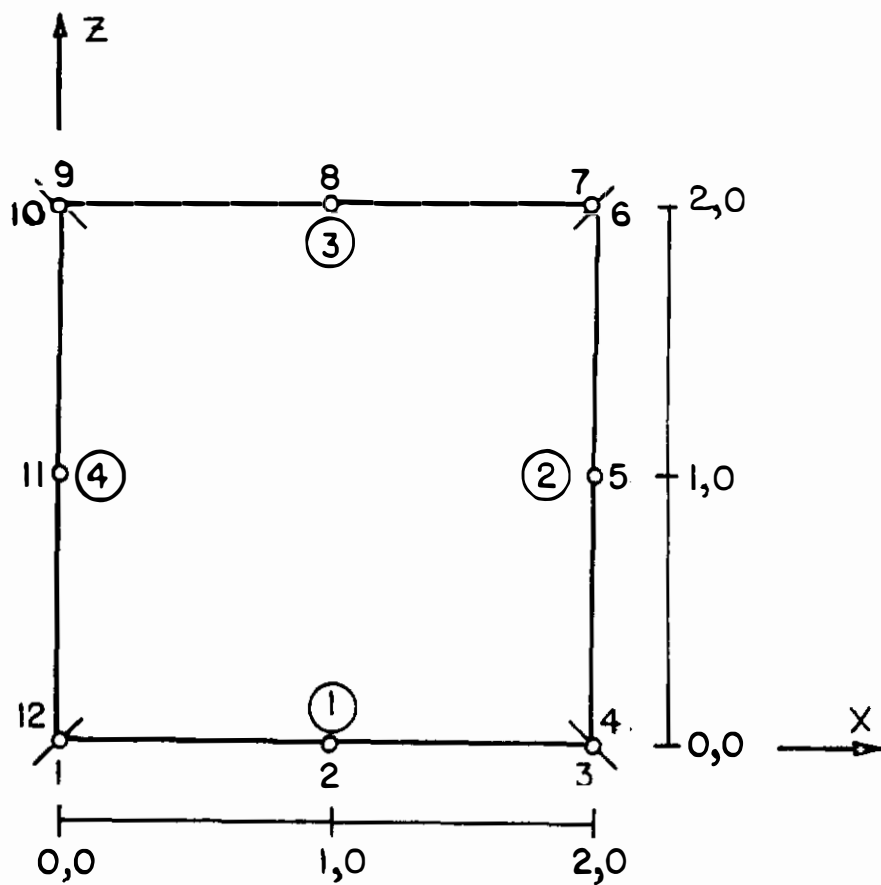


Figura 7.2.1 - Problema M1. (a) Condições geométricas. (b) Condição de contorno "D".

(a)



(b)

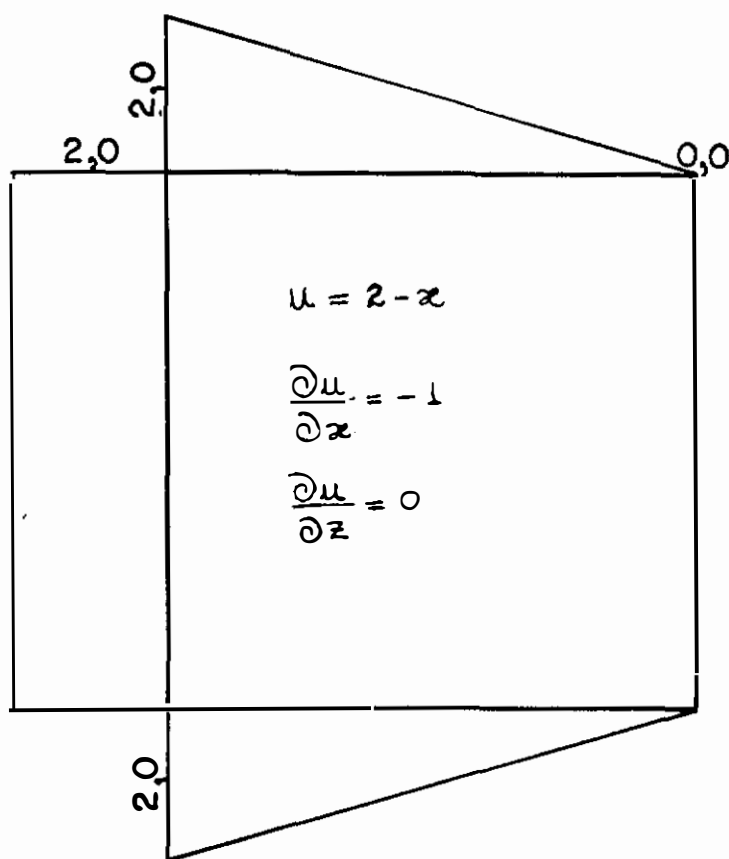


Figura 7.22- Problema M2 . (a) Condições geométricas .
(b) Condição de contorno " \bar{u} ".

7.2.2 Exemplo M2

Este exemplo tem o mesmo domínio e potencial de velocidades que o anterior, porém agora o contorno recebe elementos com colocação não nodal nos cantos . Haverá então 12 nós e 4 elementos . A figura 7.2.2 mostra as condições geométricas e as condições de contorno. A tabela 7.2.2 dá detalhes maiores dos dados e informa os resultados obtidos. Observa-se aqui, devido à colocação não nodal nos cantos, que os resultados ficaram bem melhores. O erro apareceu no oitavo algarismo significativo.

Tabela 7.2.2 - Problema M2 . Dados e Resultados .

Nó	x	z	\bar{u} (dado)
		v(analítico)	v(MEC)
1	0,0	0,0	2,0
		0,0	-0,000 000 153 299
2	1,0	0,0	1,0
		0,0	0,000 000 000 068
3	2,0	0,0	0,0
		0,0	0,000 000 153 267
4	2,0	0,0	0,0
		-1,0	-1,000 000 227 955
5	2,0	1,0	0,0
		-1,0	-1,000 000 081 368
6	2,0	2,0	0,0
		-1,0	-1,000 000 227 305
7	2,0	2,0	0,0
		0,0	0,000 000 149 475
8	1,0	2,0	1,0
		0,0	0,000 000 001 430
9	0,0	2,0	2,0
		0,0	-0,000 000 162 452

10	0,0	2,0	2,0
		1,0	1,000 000 231 706
11	0,0	1,0	2,0
		1,0	1,000 000 081 771
12	0,0	0,0	2,0
		1,0	1,000 000 228 954

7.2.3 Exemplo M3

Este exemplo tem o mesmo domínio e potencial de velocidades que os dois anteriores ($u = 2 - x$; $\partial u / \partial x = -1$; $\partial u / \partial z = 0$;). O contorno contém elementos com colocação não nodal nos cantos . Foi dividido o contorno em 8 elementos e 20 nós. A figura 7.2.3 mostra as condições geométricas e as condições de contorno. A tabela 7.2.3 dá detalhes maiores dos dados e informa os resultados obtidos. Observa-se que a divisão do contorno em um número maior de elementos trouxe piores resultados que o exemplo 7.2.2. Isto mostra que o esquema de integração está bom e que ao se colocar mais elementos no contorno só aumenta-se erros numéricos.

Tabela 7.2.3 - Problema M3 . Dados e Resultados .

Nó	x	z	\bar{u} (dado)
		v(analítica)	v(MEC)
1	0,0	0,0	2,0
		0,0	-0,000 000 194 457
2	0,5	0,0	1,5
		0,0	-0,000 000 037 432
3	1,0	0,0	1,0
		0,0	0,000 000 000 023

4	1,5	0,0	0,5
		0,0	0,000 000 037 479
5	2,0	0,0	0,0
		0,0	0,000 000 194 530
6	2,0	0,0	0,0
		-1,0	-1,000 000 310 059
7	2,0	0,5	0,0
		-1,0	-0,999 999 994 787
8	2,0	1,0	0,0
		-1,0	-1,000 000 275 344
9	2,0	1,5	0,0
		-1,0	-0,999 999 994 773
10	2,0	2,0	0,0
		-1,0	-1,000 000 309 953
11	2,0	2,0	0,0
		0,0	0,000 000 194 137
12	1,5	2,0	0,5
		0,0	0,000 000 037 624
13	1,0	2,0	1,0
		0,0	-0,000 000 001 163
14	0,5	2,0	1,5
		0,0	-0,000 000 035 596
15	0,0	2,0	2,0
		0,0	-0,000 000 210 167
16	0,0	2,0	2,0
		1,0	1,000 000 316 081
17	0,0	1,5	2,0
		1,0	0,999 999 995 422
18	0,0	1,0	2,0
		1,0	1,000 000 275 718
19	0,0	0,5	2,0
		1,0	0,999 999 994 857
20	0,0	0,0	2,0
		1,0	1,000 000 310 244

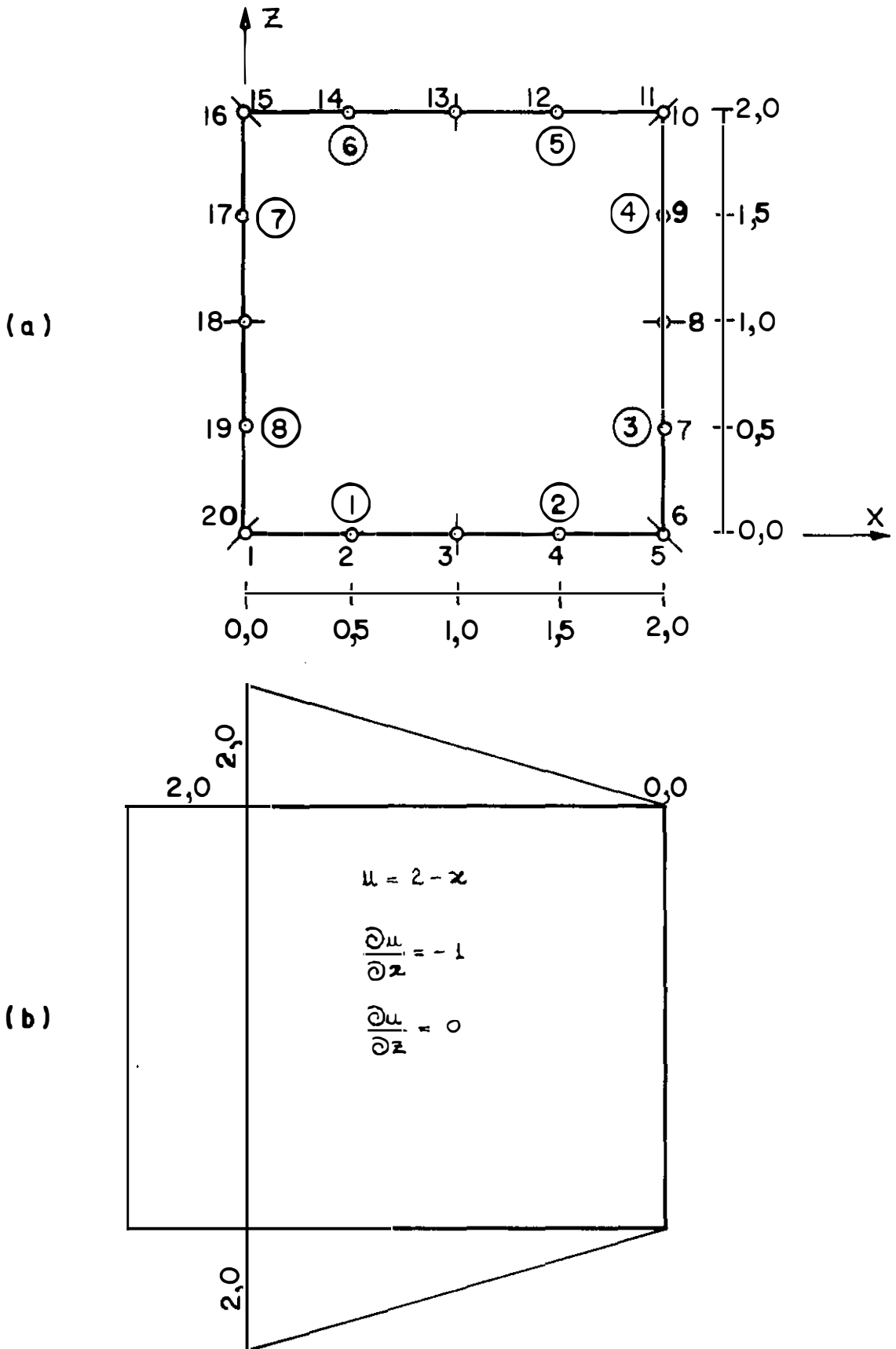
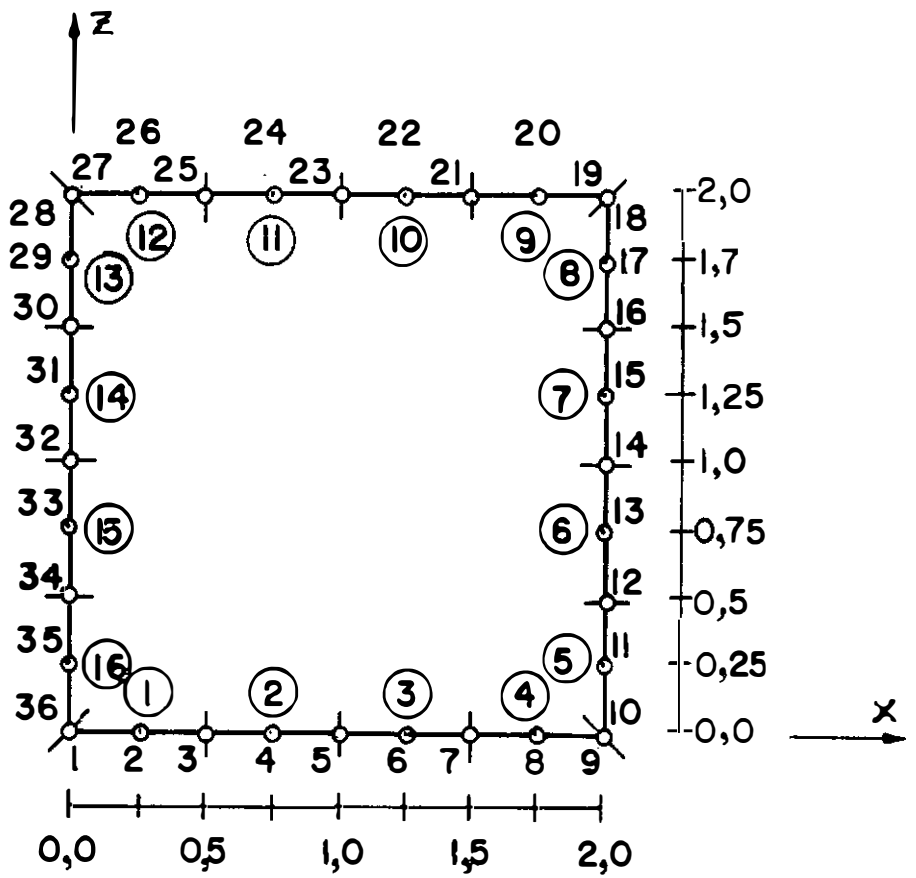


Figura 7.2.3 - Problema M3. (a) Condições geométricas, (b) Condição de contorno "u".

(a)



(b)

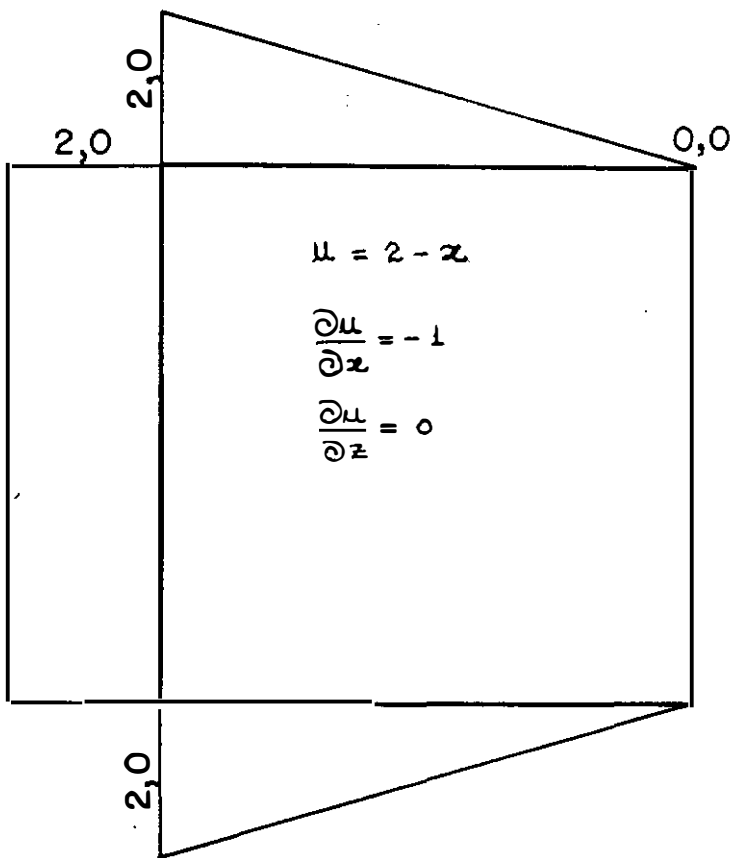


Figura 7.2.4 - Problema M4. (a) Condições geométricas. (b) Condições de contorno " \bar{u} ".

7.2.4 Exemplo M4

Este exemplo tem o mesmo domínio e potencial de velocidade que os três anteriores ($u = 2 - x$; $\partial u / \partial x = -1$; $\partial u / \partial z = 0$;). O contorno contém elementos com colocação não nodal nos cantos. Foi dividido o contorno em 16 elementos e 36 nós. A figura 7.2.4 mostra as condições geométricas e as condições de contorno. A tabela 7.2.4 dá detalhes maiores dos dados e informa os resultados obtidos. Observa-se que a divisão do contorno em um número maior de elementos, como no exemplo anterior, piorou os resultados.

Tabela 7.2.4 - Problema M4 . Dados e Resultados .

Nó	x	z	u(dado)
		v(analítica)	v(MEC)
1	0,0	0,0	2,0
		0,0	-0,000 000 202 207
2	0,25	0,0	1,75
		0,0	-0,000 000 046 888
3	0,5	0,0	1,5
		0,0	-0,000 000 024 688
4	0,75	0,0	1,25
		0,0	-0,000 000 007 931
5	1,0	0,0	1,0
		0,0	0,000 000 000 012
6	1,25	0,0	0,75
		0,0	0,000 000 007 955
7	1,5	0,0	0,5
		0,0	0,000 000 024 715
8	1,75	0,0	0,25
		0,0	0,000 000 046 922
9	2,0	0,0	0,0
		0,0	0,000 000 202 278

10	2,0	0,0	0,0
		-1,0	-1,000 000 307 763
11	2,0	0,25	0,0
		-1,0	-0,999 999 982 205
12	2,0	0,5	0,0
		-1,0	-1,000 000 263 826
13	2,0	0,75	0,0
		-1,0	-0,999 999 915 837
14	2,0	1,0	0,0
		-1,0	-1,000 000 262 875
15	2,0	1,25	0,0
		-1,0	-0,999 999 915 835
16	2,0	1,5	0,0
		-1,0	-1,000 000 263 822
17	2,0	1,75	0,0
		-1,0	-0,999 999 982 197
18	2,0	2,0	0,0
		-1,0	-1,000 000 307 738
19	2,0	2,0	0,0
		0,0	0,000 000 202 303
20	1,75	2,0	0,25
		0,0	0,000 000 046 948
21	1,5	2,0	0,5
		0,0	0,000 000 024 735
22	1,25	2,0	0,75
		0,0	0,000 000 008 002
23	1,0	2,0	1,0
		0,0	-0,000 000 000 096
24	0,75	2,0	1,25
		0,0	-0,000 000 007 721
25	0,5	2,0	1,5
		0,0	-0,000 000 026 994
26	0,25	2,0	1,75
		0,0	-0,000 000 043 206
27	0,0	2,0	2,0
		0,0	-0,000 000 233 603
28	0,0	2,0	2,0
		1,0	1,000 000 319 724

29	0,0	1,75	2,0
		1,0	0,999 999 983 432
30	0,0	1,5	2,0
		1,0	1,000 000 264 501
31	0,0	1,25	2,0
		1,0	0,999 999 915 940
32	0,0	1,0	2,0
		1,0	1,000 000 262 985
33	0,0	0,75	2,0
		1,0	0,999 999 915 895
34	0,0	0,5	2,0
		1,0	1,000 000 263 879
35	0,0	0,25	2,0
		1,0	0,999 999 982 254
36	0,0	0,0	2,0
		1,0	1,000 000 307 842

7.2.5 Exemplo M5

Este exemplo tem as condições geométricas dos anteriores porém o potencial de velocidades é diferente e está indicado na figura 7.2.5 e tabela 7.2.5 . Este exemplo mostra a solução de um problema com potencial parabólico e do qual temos uma solução exata para comparar. Os resultados piores diferem a partir da casa do sexto algarismo significativo. O contorno foi dividido em 16 elementos e 36 nós.

Tabela 7.2.5 - Problema M5 . Dados e Resultados .

Nó	x	z	u(dado)
		v(analítica)	v(MEC)
1	0,0	0,0	0,0
		0,0	-0,000 000 001 594
2	0,25	0,0	0,062 5
		0,0	-0,000 000 002 759
3	0,5	0,0	0,25
		0,0	-0,000 000 005 791
4	0,75	0,0	1,25
		0,0	-0,000 000 011 710
5	1,0	0,0	1,0
		0,0	-0,000 000 025 138
6	1,25	0,0	0,75
		0,0	-0,000 000 043 492
7	1,5	0,0	0,5
		0,0	-0,000 000 104 621
8	1,75	0,0	0,25
		0,0	-0,000 000 190 421
9	2,0	0,0	0,0
		0,0	-0,000 000 810 695
10	2,0	0,0	0,0
		4,0	4,000 001 232 432
11	2,0	0,25	0,0
		4,0	3,999 999 931 421
12	2,0	0,5	0,0
		4,0	4,000 001 060 972
13	2,0	0,75	0,0
		4,0	3,999 999 674 832
14	2,0	1,0	0,0
		4,0	4,000 001 077 008
15	2,0	1,25	0,0
		4,0	3,999 999 705 970
16	2,0	1,5	0,0
		4,0	4,000 001 168 785

17	2,0	1,75	0,0
		4,0	4,000 000 104 861
18	2,0	2,0	0,0
		4,0	4,000 002 163 127
19	2,0	2,0	0,0
		-4,0	-4,000 002 087 898
20	1,75	2,0	0,25
		-4,0	-4,000 000 123 917
21	1,5	2,0	0,5
		-4,0	-4,000 001 162 481
22	1,25	2,0	0,75
		-4,0	-3,999 999 707 196
23	1,0	2,0	1,0
		-4,0	-4,000 001 077 004
24	0,75	2,0	1,25
		-4,0	-3,999 999 675 265
25	0,5	2,0	1,5
		-4,0	-4,000 001 060 967
26	0,25	2,0	1,75
		-4,0	-3,999 999 932 176
27	0,0	2,0	2,0
		-4,0	-4,000 001 228 932
28	0,0	2,0	2,0
		0,0	0,000 000 808 829
29	0,0	1,75	2,0
		0,0	0,000 000 190 104
30	0,0	1,5	2,0
		0,0	0,000 000 104 412
31	0,0	1,25	2,0
		0,0	0,000 000 043 398
32	0,0	1,0	2,0
		0,0	0,000 000 025 031
33	0,0	0,75	2,0
		0,0	0,000 000 011 614
34	0,0	0,5	2,0
		0,0	0,000 000 005 691
35	0,0	0,25	2,0
		0,0	0,000 000 002 645

36	0,0	0,0	2,0
		0,0	0,000 000 001 383

7.2.6 Exemplo M6

A semelhança do exemplo 5 este tem a mesma geometria, porém a função potencial de velocidade é diferente e seus valores no contorno podem ser apreciadas na figura 7.2.6 e na tabela 7.2.6 . Neste caso ainda foi possível obter soluções teóricas para a velocidade e esta foi comparada com a solução do MEC na tabela 7.2.6 . A solução do MEC difere da analítica a partir do segundo algarismo significativo. O valor do potencial aproximado só até a sexta casa decimal contribuiu para isto. O contorno tem elementos com colocação não nodal nos cantos. O contorno foi discretizado em 16 elementos e 36 nós.

7.2.7 Exemplo M7

A geometria deste exemplo é a mesma do anterior. O potencial de velocidades tem a forma de uma onda senoidal " $\bar{u} = 0,2 \sin(\pi x)$ " e seus valores estão discretizados na figura 7.2.7 e também na tabela 7.2.7 . Este exemplo foi montado para ser comparado seus resultados com àqueles obtidos com o exemplo M9. Este último utiliza somente 19 nós . O MEC utiliza neste caso uma função que rebate o ponto fonte considerando a simetria da figura em relação a um eixo horizontal que passa nos nós 14 e 32 da figura 7.2.7a . Esta simplificação foi utilizada para rodar os exemplos de ondas gravitacionais sem discretizar o fundo, o que simplifica o trabalho e reduz o tempo de montagem e solução do sistema de equações. A discretização dividiu o contorno em 16 elementos e 36 nós. Os resultados obtidos pela resolução do MEC estão na tabela 7.2.7 .

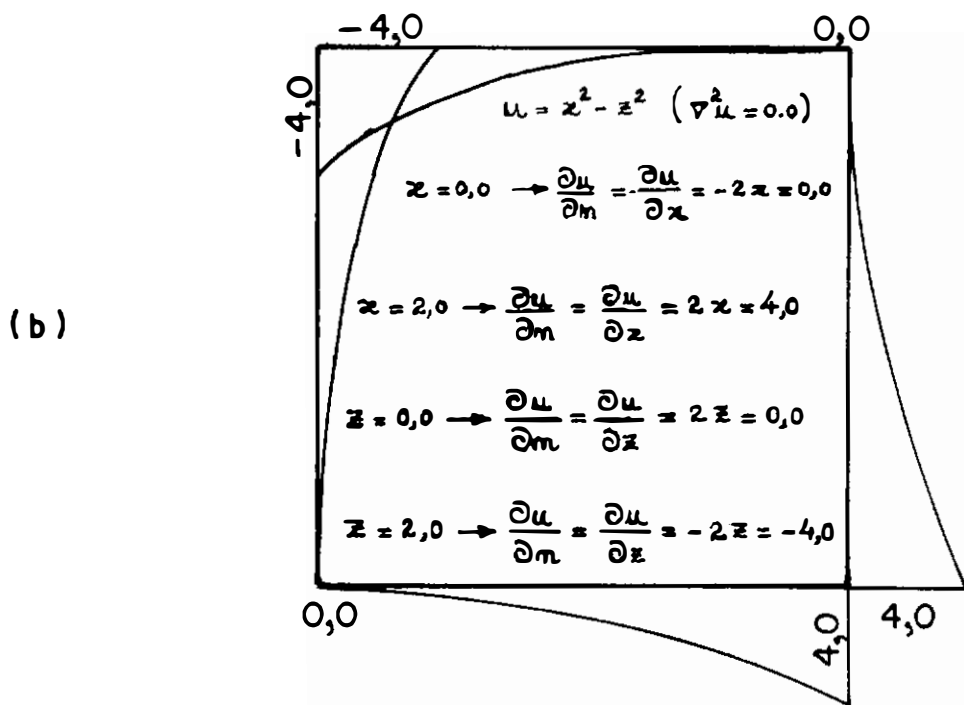
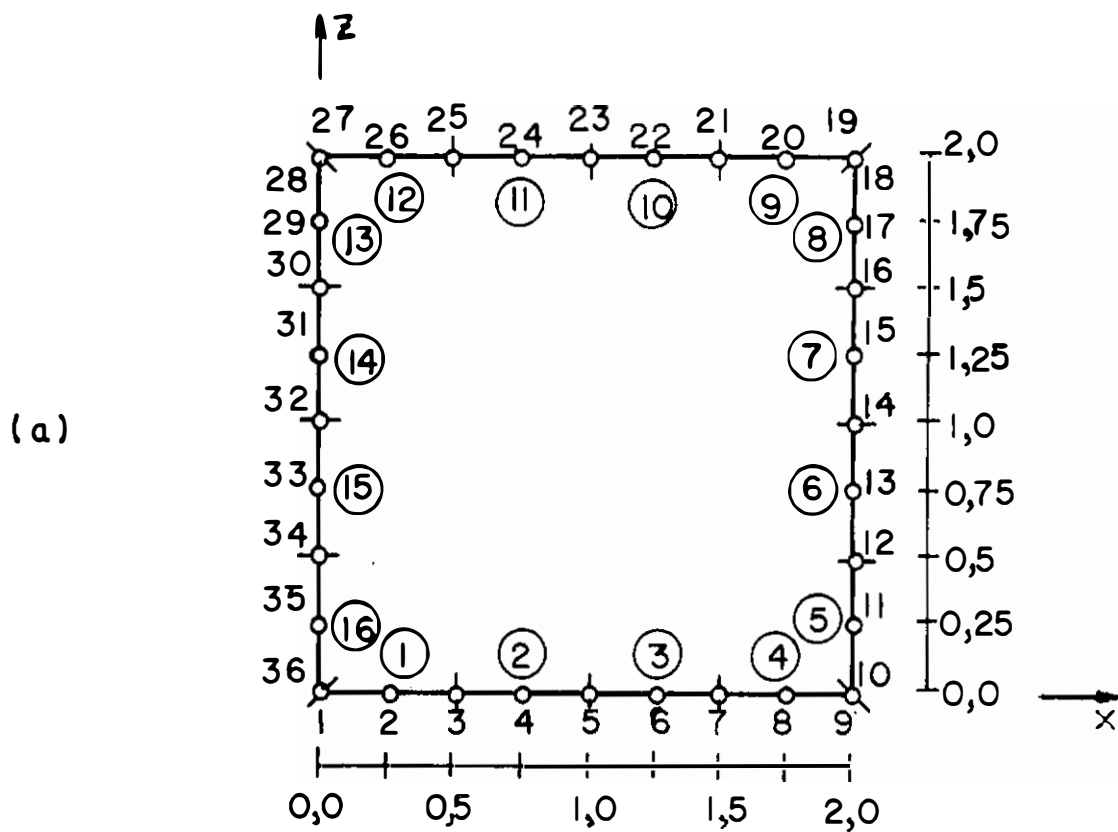


Figura 7.2.5 – Problema M5. (a) Condições geométricas. (b) Condições de contorno " \bar{u} ".

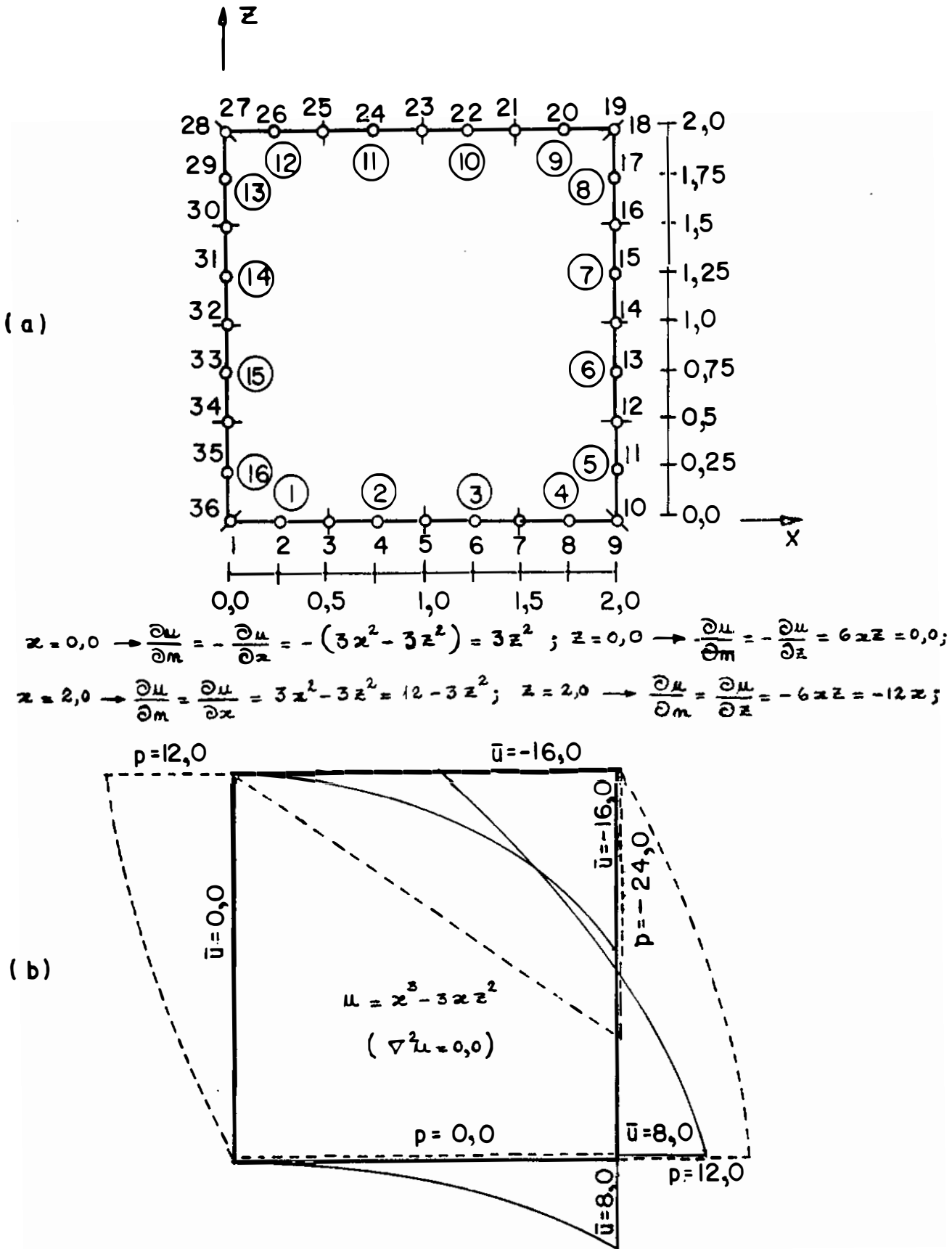


Figura 7.2.6 - Problema M6. (a) Condições geométricas. (b) Condições de contorno " \bar{u} " e solução teórica para o fluxo (p).

Tabela 7.2.6 - Problema M6 . Dados e Resultados .

Nó	x	z	\bar{u} (dado)
		v(analítica)	v(MEC)
1	0,0	0,0	0,0
		0,0	-0,160 928 420 609
2	0,25	0,0	0,015 625
		0,0	0,016 206 930 653
3	0,5	0,0	0,125
		0,0	-0,011 846 745 525
4	0,75	0,0	0,421 875
		0,0	0,000 679 801 788
5	1,0	0,0	1,0
		0,0	-0,000 000 075 407
6	1,25	0,0	1,953 125
		0,0	-0,000 679 967 380
7	1,5	0,0	3,375
		0,0	0,011 846 414 303
8	1,75	0,0	5,359 375
		0,0	-0,016 207 510 181
9	2,0	0,0	8,0
		0,0	0,160 925 983 744
10	2,0	0,0	8,0
		12,0	11,925 545 820 503
11	2,0	0,25	7,625
		11,812 5	11,805 392 477 886
12	2,0	0,5	6,5
		11,25	11,246 359 208 399
13	2,0	0,75	4,625
		10,312 5	10,312 148 378 059
14	2,0	1,0	2,0
		9,0	8,999 246 684 219
15	2,0	1,25	-1,375
		7,312 5	7,312 148 694 501
16	2,0	1,5	-5,5
		5,25	5,246 358 132 427

17	2,0	1,75	-10,375				
		2,812 5	2,805	393	084	623	
18	2,0	2,0	-16,0				
		0,0	-0,074	452	208	908	
19	2,0	2,0	-16,0				
		-24,0	-23,839	079	172	601	
20	1,75	2,0	-15,640	625			
		-21,0	-21,016	207	195	300	
21	1,5	2,0	-14,625				
		-18,0	-17,988	158	193	025	
22	1,25	2,0	-13,046	875			
		-15,0	-15,000	678	733	898	
23	1,0	2,0	-11,0				
		-12,0	-12,000	003	233	344	
24	0,75	2,0	-8,578	125			
		-9,0	-8,999	319	411	606	
25	0,5	2,0	-5,875				
		-6,0	-6,011	848	513	546	
26	0,25	2,0	-2,984	375			
		-3,0	-2,983	792	941	069	
27	0,0	2,0	0,0				
		0,0	-0,160	931	305	569	
28	0,0	2,0	0,0				
		12,0	12,074	461	637	406	
29	0,0	1,75	0,0				
		9,187 5	9,194	607	772	317	
30	0,0	1,5	0,0				
		6,75	6,753	645	722	048	
31	0,0	1,25	0,0				
		4,687 5	4,687	850	552	102	
32	0,0	1,0	0,0				
		3,0	3,000	756	624	243	
33	0,0	0,75	0,0				
		1,687 5	1,687	850	681	193	
34	0,0	0,5	0,0				
		0,75	0,753	643	991	746	
35	0,0	0,25	0,0				
		0,187 5	0,194	607	324	300	

36	0,0	0,0	0,0
		0,0	0,074 457 881 001

Tabela 7.2.7 - Problema M7 . Dados e Resultados .

Nó	x	z	$\bar{u}(\text{dado})$ $v(\text{MEC})$
1	0,0	0,0	0,0 0,009 483 598 085
2	0,25	0,0	0,014 142 1 0,043 139 874 027
3	0,5	0,0	0,02 0,065 016 666 709
4	0,75	0,0	0,014 0,043 286 747 344
5	1,0	0,0	0,0 0,000 607 371 953
6	1,25	0,0	-0,014 142 1 -0,044 097 064 594
7	1,5	0,0	-0,02 -0,064 352 523 550
8	1,75	0,0	-0,014 142 1 -0,043 135 720 248
9	2,0	0,0	0,0 -0,009 304 379 122
10	2,0	0,0	0,0 0,066 112 980 892
11	2,0	0,25	0,0 0,029 483 626 657
12	2,0	0,5	0,0 0,013 999 524 076
13	2,0	0,75	0,0 0,007 178 092 270

14	2,0	1,0	0,0
			0,005 613 762 813
15	2,0	1,25	0,0
			0,007 174 385 587
16	2,0	1,5	0,0
			0,013 994 006 587
17	2,0	1,75	0,0
			0,029 479 768 146
18	2,0	2,0	0,0
			0,066 116 367 410
19	2,0	2,0	0,0
			-0,009 315 279 401
20	1,75	2,0	-0,014 142 1
			-0,043 137 510 188
21	1,5	2,0	-0,02
			-0,064 400 005 338
22	1,25	2,0	-0,014 142 1
			-0,044 118 054 477
23	1,0	2,0	0,0
			0,000 005 319 150
24	0,75	2,0	-0,014 142 1
			0,044 127 827 071
25	0,5	2,0	0,02
			0,064 407 350 014
26	0,25	2,0	0,014 142 1
			0,043 141 235 992
27	0,0	2,0	0,0
			0,009 314 301 191
28	0,0	2,0	0,0
			-0,066 117 222 473
29	0,0	1,75	0,0
			-0,029 475 985 434
30	0,0	1,5	0,0
			-0,013 985 230 473
31	0,0	1,25	0,0
			-0,007 159 344 185
32	0,0	1,0	0,0
			-0,005 591 025 906

33	0,0	0,75	0,0
			-0,007 145 479 654
34	0,0	0,5	0,0
			-0,013 961 216 023
35	0,0	0,25	0,0
			-0,029 454 130 117
36	0,0	0,0	0,0
			-0,066 151 439 398

7.2.8 Exemplo M8

Este exemplo corresponde exatamente à metade superior do exemplo M4 ($u = 2 - x$; $\partial u / \partial x = -1$; $\partial u / \partial z = 0$;), considerando seu eixo de simetria a linha ligando os pontos 14 e 32. Este é um teste do cálculo do MEC através da função que considera o rebatimento por simetria do ponto fonte, permitindo que o domínio seja dividido por dois quando a velocidade normal ao eixo de simetria é nulo. Assim o cálculo do exemplo M4 fica simplificado para M8, através do uso de somente 8 elementos e 19 nós . A figura 7.2.8 mostra as características do problema e a tabela 7.2.8 resume os dados e resultados obtidos . Comparando o valor dos fluxos obtidos nos nós correspondentes (por exemplo o nó 14 do Problema M4 corresponde ao nó 1 do Problema M8) vê-se que os valores são praticamente iguais . Este problema permite uma melhor observação dos resultados que o exemplo M9, que virá a seguir, pois dele se conhece os resultados teóricos.

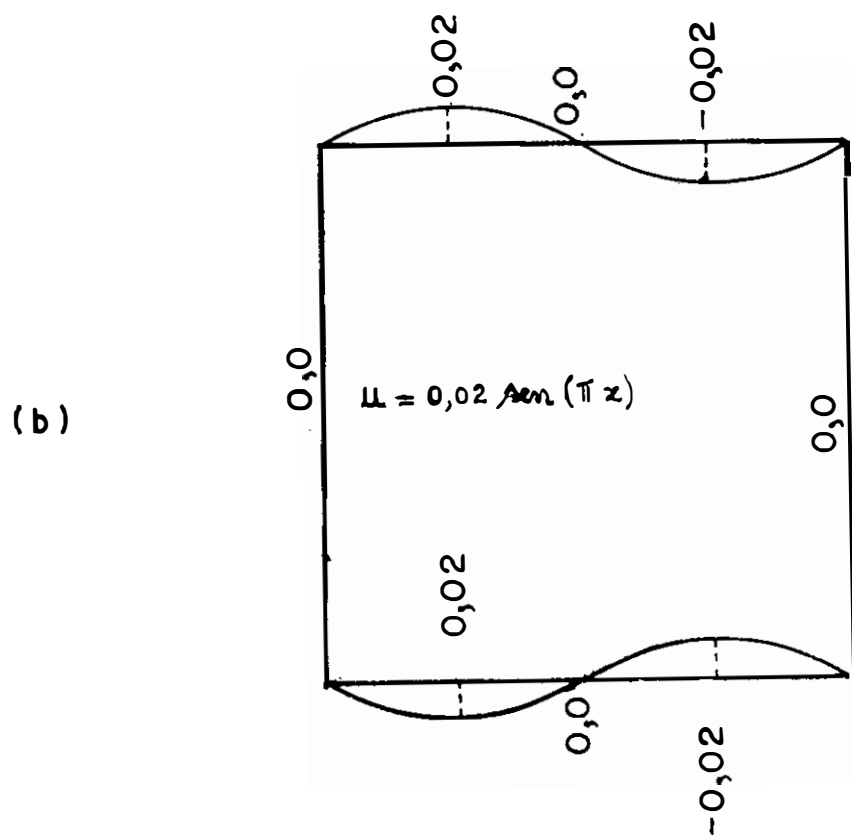
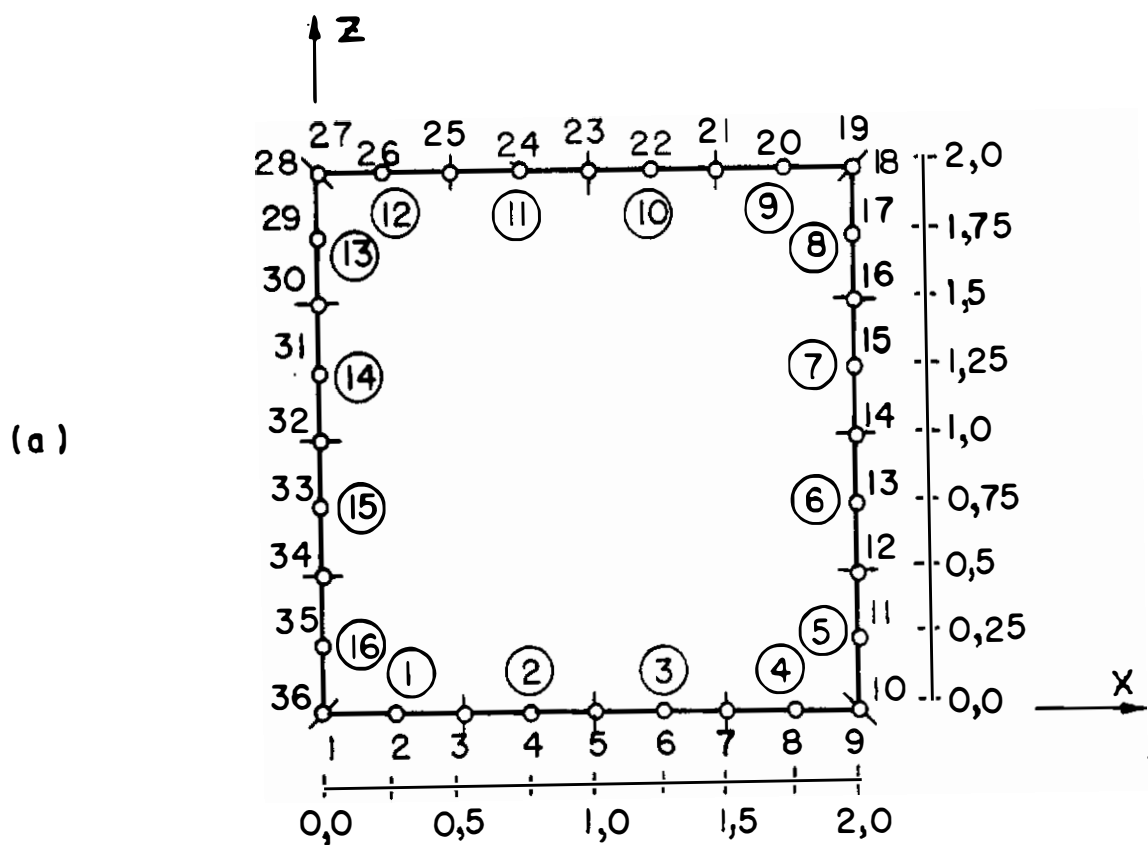


Figura 7.2.7 - Problema M7. (a) Condições geométricas. (b) Condições de contorno " \bar{u} ".

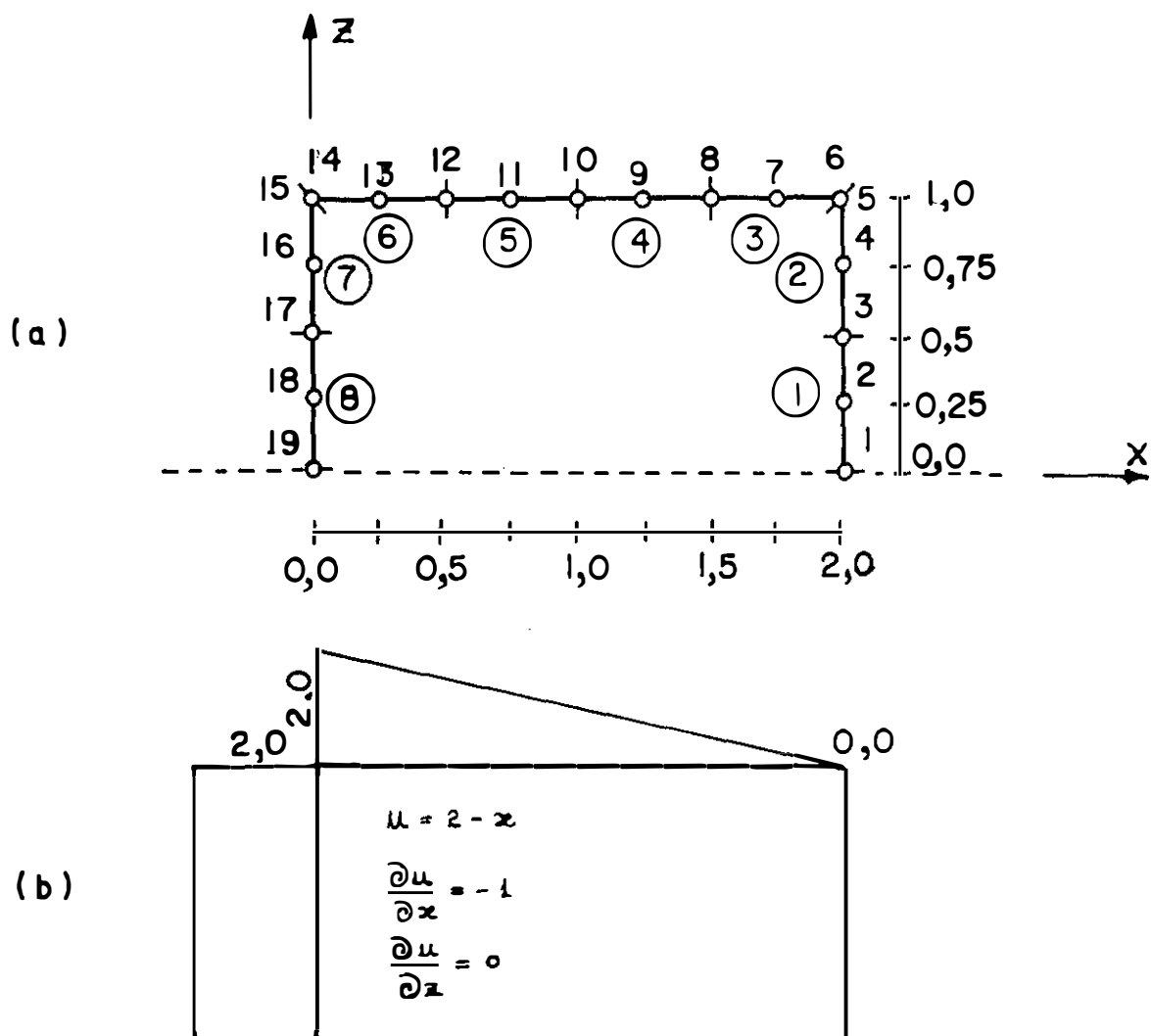


Figura 7.2.8 – Problema M8. (a) Condições geométricas. (b) Condições de contorno “ \bar{u} ”.

Tabela 7.2.8 - Problema M8 . Dados e Resultados .

Nó	x	z		\bar{u} (dado)	
		v(analítica)		v(MEC)	
1	2,0	0,0		0,0	
		-1,0	-1,000 000 262 875		
2	2,0	0,25		0,0	
		-1,0	-0,999 999 915 836		
3	2,0	0,5		0,0	
		-1,0	-1,000 000 263 824		
4	2,0	0,75		0,0	
		-1,0	-0,999 999 982 201		
5	2,0	1,0		0,0	
		-1,0	-1,000 000 307 750		
6	2,0	1,0		0,0	
		0,0	0,000 000 202 291		
7	1,75	1,0		0,25	
		0,0	0,000 000 046 935		
8	1,5	1,0		0,5	
		0,0	0,000 000 024 725		
9	1,25	1,0		0,75	
		0,0	0,000 000 007 979		
10	1,0	1,0		1,0	
		0,0	-0,000 000 000 042		
11	0,75	1,0		1,25	
		0,0	-0,000 000 007 826		
12	0,5	1,0		1,5	
		0,0	-0,000 000 025 841		
13	0,25	1,0		1,75	
		0,0	-0,000 000 045 047		
14	0,0	1,0		2,0	
		0,0	-0,000 000 217 905		
15	0,0	1,0		2,0	
		1,0	1,000 000 313 783		
16	0,0	0,75		2,0	
		1,0	0,999 999 982 843		

17	0,0	0,5	2,0
		1,0	1,000 000 264 190
18	0,0	0,25	2,0
		1,0	0,999 999 915 917
19	0,0	0,0	2,0
		1,0	1,000 000 262 985

-

7.2.9 Exemplo M9

Este problema difere do M8 sòmente em relação ao potencial de velocidades dado " $\bar{u} = 0,02 \text{ sen } (\pi x)$ ", portanto, todas as observações feitas a este são válidas aqui. O exemplo M9 representa o problema M7 se for usada a função de rebatimento do ponto fonte . Pode-se observar os mesmos resultados para os pontos correspondentes a menos de pequenos erros numéricos. A geometria deste problema é representada pela figura 7.2.9 e os dados e resultados são descritos na tabela 7.2.9 . Não há resultados teóricos da velocidade .

Tabela 7.2.9 - Problema M9 . Dados e Resultados .

Nó	x	z	u(dado) v(MEC)
1	2,0	0,0	0,0 0,005 605 746 961
2	2,0	0,25	0,0 0,007 168 505 110
3	2,0	0,5	0,0 0,013 990 336 895
4	2,0	0,75	0,0 0,029 478 117 843
5	2,0	1,0	0,0 0,066 116 760 347
6	2,0	1,0	0,0 -0,009 314 859 279
7	1,75	1,0	-0,014 142 1 -0,043 139 147 066
8	1,5	1,0	-0,02 -0,064 403 336 725

9	1,25	1,0	-0,014 142 1
			-0,044 122 699 235
10	1,0	1,0	0,0
			0,000 000 000 003
11	0,75	1,0	0,014 142 1
			0,044 122 699 225
12	0,5	1,0	0,02
			0,064 403 336 797
13	0,25	1,0	0,014 142 1
			0,043 139 146 943
14	0,0	1,0	0,0
			0,009 314 860 292
15	0,0	1,0	0,0
			-0,066 116 760 739
16	0,0	0,75	0,0
			-0,029 478 117 885
17	0,0	0,5	0,0
			-0,013 990 336 919
18	0,0	0,25	0,0
			-0,007 168 505 116
19	0,0	0,0	0,0
			-0,005 605 746 968

7.2.10 Exemplo M10

O problema M10 foi realizado para mostrar os resultados para um contorno curvo, neste caso uma circunferência . O contorno foi dividido em 4 elementos e 12 nós, sendo que 4 destes são pontos de colocação não nodal .O potencial de velocidades que está sujeito o domínio é um plano com inclinação de 45 graus " $\bar{u} = 2 - x$ " e suas derivadas nas direções " x " e " z " são " $\partial\bar{u}/\partial x = -1,0$ " e " $\partial\bar{u}/\partial z = 0,0$ ". As condições geométricas e físicas do contorno podem ser observadas na figura 7.2.10 e os resultados estão impressos na tabela 7.2.10 .

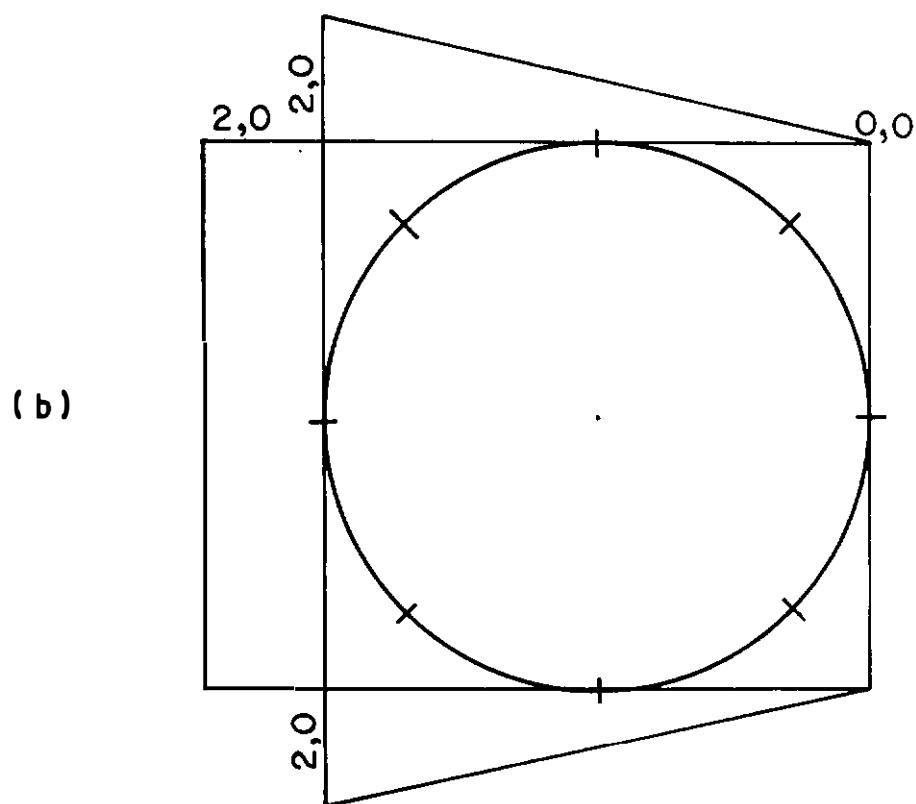
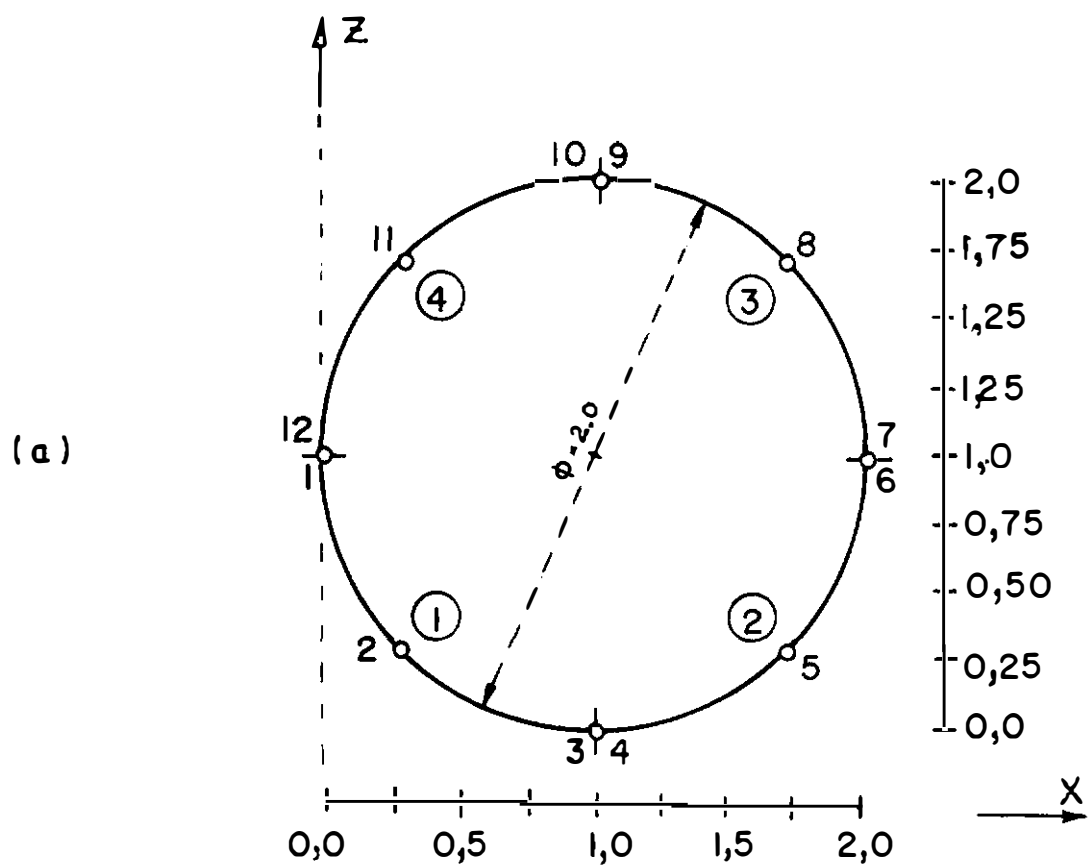
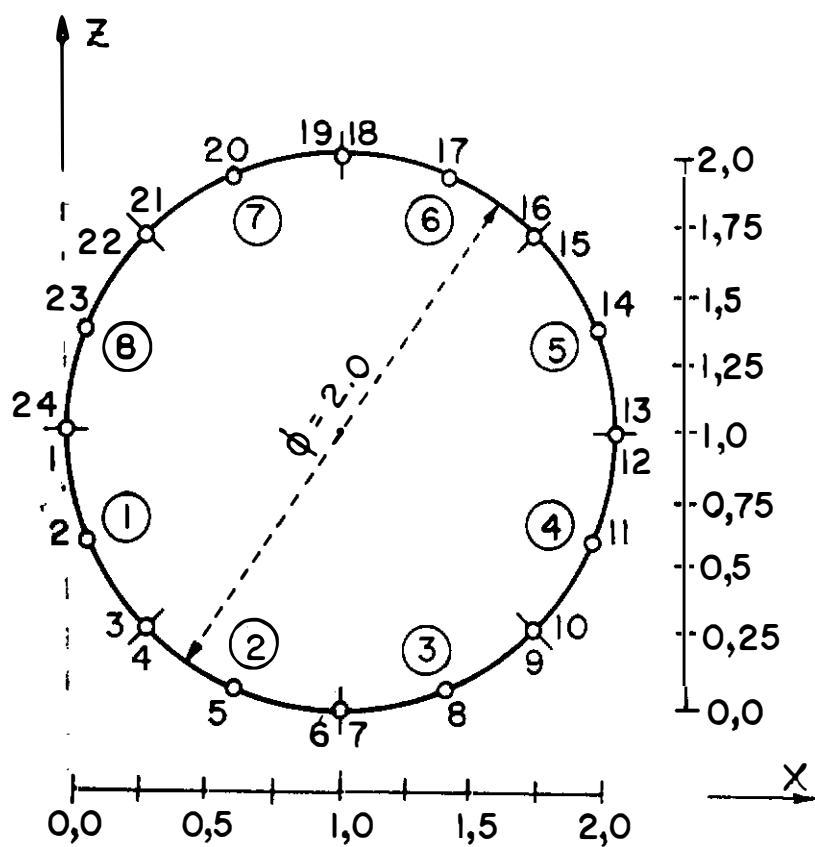


Figura 7.2.10 – Problema M10. (a) Condições geométricas .

(b) Condições de contorno " \bar{u} ".

(a)



(b)

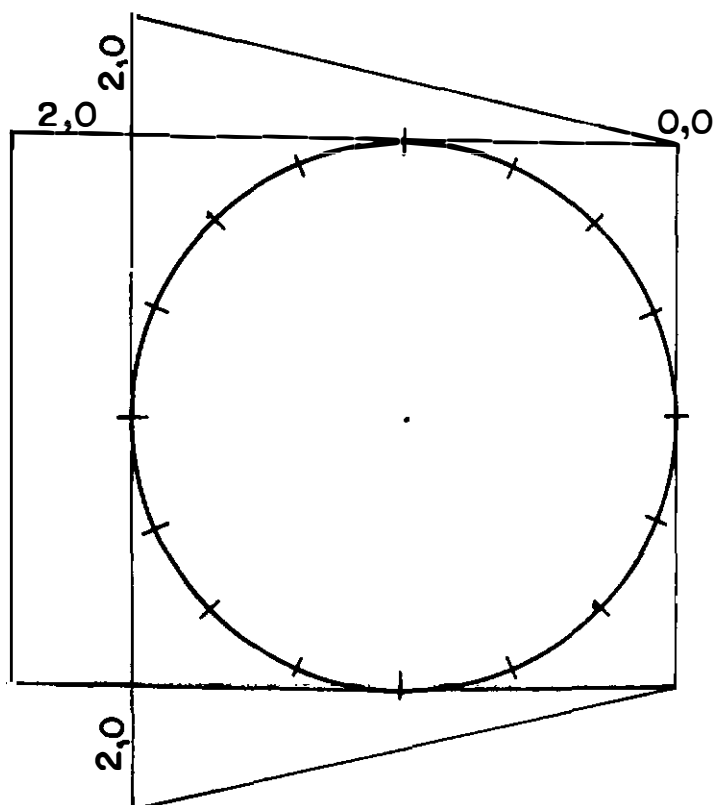


Figura 7.2.11 – Problema MII. (a) Condições geométricas. (b) Condições de contorno " \bar{u} ".

Tabela 7.2.10 - Problema M10 . Dados e Resultados .

Nó	x	z	u(dado)
	v (analítico)		v(MEC)
1	0,0	1,0	2,0
		1,0	1,021 904 428 889
2	0,292 893 218	0,292 893 218	1,707 106 782
		0,707 106 781	0,705 740 529 665
3	1,0	0,0	1,0
		0,0	-0,023 962 330 566
4	1,0	0,0	1,0
		0,0	0,023 962 345 075
5	1,707 106 782	0,292 893 218	0,292 893 218
		-0,707 106 781	-0,705 740 534 795
6	2,0	1,0	0,0
		-1,0	-1,021 904 409 071
7	2,0	1,0	0,0
		-1,0	-1,021 904 459 322
8	1,707 106 782	1,707 106 782	0,292 893 218
		-0,707 106 781	-0,705 740 521 370
9	1,0	2,0	1,0
		0,0	0,023 962 263 789
10	1,0	2,0	1,0
		0,0	-0,023 962 287 218
11	0,292 893 218	1,707 106 782	1,707 106 782
		0,707 106 781	0,705 740 527 634
12	0,0	1,0	2,0
		1,0	1,021 904 444 353

7.2.11 Exemplo M11

Este exemplo é igual ao anterior a menos de uma discretização que é dobrada. São usados 8 elementos e 24 nós. Todos os elementos tem nós com colocação não nodal. As coordenadas dos pontos e o potencial de velocidades são dados na figura 7.2.11 e tabela 7.2.11. Esta tabela também mostra o resumo das condições de contorno e os resultados obtidos .

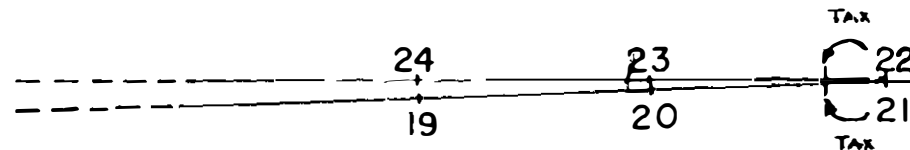
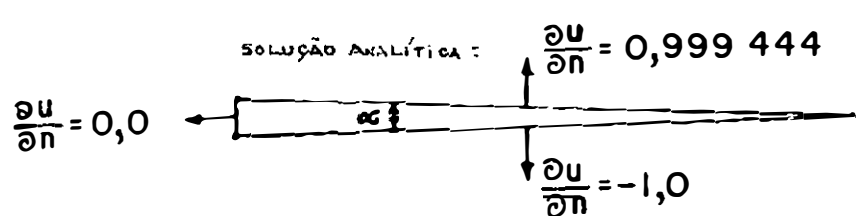
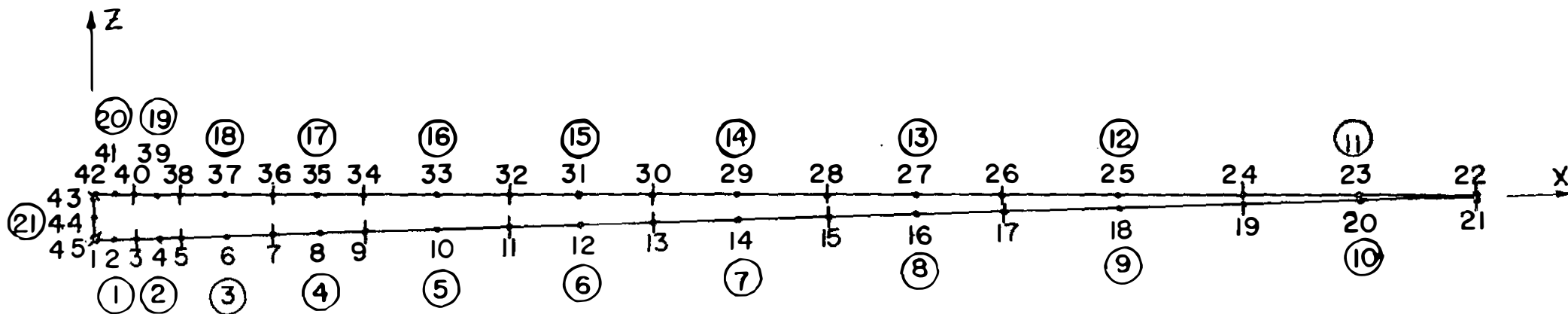
Tabela 7.2.11 - Problema M11 . Dados e Resultados .

Nó	x	z	u(dado)
		v(analítica)	v(MEC)
1	0,0	1,0	2,0
		1,0	1,001 528 961 853
2	0,076 120 467	0,617 316 567	1,923 879 532
		0,923 879 532	0,923 737 078 445
3	0,292 893 218	0,292 893 218	1,707 106 782
		0,707 106 781	0,705 165 945 042
4	0,292 893 218	0,292 893 218	1,707 106 782
		0,707 106 781	0,711 209 886 956
5	0,617 316 567	0,076 120 467	1,382 683 432
		0,382 683 432	0,382 624 425 337
6	1,0	0,0	1,0
		0,0	-0,004 273 732 260
7	1,0	0,0	1,0
		0,0	0,004 273 735 780
8	1,382 683 432	0,076 120 467	0,617 316 567
		-0,382 683 432	-0,382 624 425 821
9	1,707 106 782	0,292 893 218	0,292 893 218
		-0,707 106 781	-0,711 209 916 630
10	1,707 106 782	0,292 893 218	0,292 893 218
		-0,707 106 781	-0,705 165 895 567

11	1,923 879 532	0,617 316 567	0,076 120 467
		-0,923 879 532	-0,923 737 084 605
12	2,0	1,0	0,0
		-1,0	-1,001 528 942 821
13	2,0	1,0	0,0
		-1,0	-1,001 528 955 616
14	1,923 879 532	1,382 683 432	0,076 120 467
		-0,923 879 532	-0,923 737 081 654
15	1,707 106 782	1,707 106 782	0,292 893 218
		-0,707 106 781	-0,705 165 900 996
16	1,707 106 782	1,707 106 782	0,292 893 218
		-0,707 106 781	-0,711 209 905 470
17	1,382 683 432	1,923 879 532	0,617 316 567
		-0,382 683 432	-0,382 624 431 410
18	1,0	2,0	1,0
		0,0	0,004 273 885 302
19	1,0	2,0	1,0
		0,0	-0,004 273 943 941
20	0,617 316 567	1,923 879 532	1,382 683 432
		0,382 683 432	0,382 624 453 560
21	0,292 893 218	1,707 106 782	1,707 106 782
		0,707 106 781	0,711 209 824 060
22	0,292 893 218	1,707 106 782	1,707 106 782
		0,707 106 781	0,705 165 935 207
23	0,076 120 467	1,382 683 432	1,923 879 532
		0,923 879 532	0,923 737 083 025
24	0,0	1,0	2,0
		1,0	1,001 528 953 711

7.2.12 Exemplo M12

Este exemplo pretende mostrar a capacidade do algoritmo desenvolvido de obter bons resultados inclusive para geometrias com canto agudo. A geometria pode ser vista na figura 7.2.12 . O potencial de velocidades é " $\bar{u} = z$ " e



$$\alpha = \text{Arctg}\left(\frac{0,2}{6,0}\right) = 1,91 \text{ graus}$$

$$\cos(\alpha) = 0,999\ 444\ 907$$

Obs: A forma desta figura permite obter $D < 0,05$ no teste do elemento quase singular (Telles [1])

Figura 7.2.12 – Problema M12. Os ângulos e lados da figura estão em verdadeira grandeza. ($u = z$)

suas derivadas em relação aos eixos coordenados são " $\partial \bar{u} / \partial x = 0,0$ " e " $\partial \bar{u} / \partial z = 1,0$ ". Os dados, o resultado analítico e àqueles obtidos via MEC estão na tabela 7.2.12. A diferença de 10% entre o resultado do MEC e o analítico nos nós 21 e 22 possivelmente foi devido a malha ter sido pouco refinada no bico (junto aos elementos 10 e 11) e as coordenadas " z " dos nós 22 até 42 terem sido fornecidas truncadas na sexta casa decimal. Os nós 1, 21, 22, 42, 43 e 45 têm colocação não-nodal. Sua colocação para integração é no interior do elemento e afastado de sua posição original no contorno de tax multiplicado pelo comprimento do seu elemento. Neste exemplo foi adotado $\text{tax} = 0,25$.

A superfície formada pelo potencial de velocidades "u" corresponde a um plano inclinado tal que os módulos de "u" sejam iguais aos valores das coordenadas geométricas "z" do domínio.

Tabela 7.2.12 - Problema M12 . Dados e Resultados .

Nó	x	z		u(dado)			
		v(analítico)		v(MEC)			
1	0,0	0,0		0,0			
		-1,0		-1,000 111 648 219			
2	0,1	0,0		0,0			
		-1,0		-1,000 046 054 459			
3	0,2	0,0		0,0			
		-1,0		-1,000 034 539 317			
4	0,3	0,0		0,0			
		-1,0		-1,000 027 131 704			
5	0,4	0,0		0,0			
		-1,0		-1,000 025 050 893			
6	0,6	0,0		0,0			
		-1,0		-1,000 021 667 646			
7	0,8	0,0		0,0			
		-1,0		-1,000 020 547 780			
8	1,0	0,0		0,0			

		-1,0	-1,000 019 372 597
9	1,2	0,0	0,0
		-1,0	-1,000 019 082 848
10	1,5	0,0	0,0
		-1,0	-1,000 019 041 341
11	1,8	0,0	0,0
		-1,0	-1,000 019 901 058
12	2,1	0,0	0,0
		-1,0	-1,000 020 461 891
13	2,4	0,0	0,0
		-1,0	-1,000 021 715 577
14	2,8	0,0	0,0
		-1,0	-1,000 024 404 509
15	3,2	0,0	0,0
		-1,0	-1,000 029 699 366
16	3,6	0,0	0,0
		-1,0	-1,000 035 165 263
17	4,0	0,0	0,0
		-1,0	-1,000 043 769 152
18	4,5	0,0	0,0
		-1,0	-1,000 120 539 412
19	5,0	0,0	0,0
		-1,0	-0,998 190 727 330
20	5,5	0,0	0,0
		-1,0	-1,000 768 808 606
21	6,0	0,0	0,0
		-1,0	-1,096 840 448 810
22	6,0	0,0	0,0
		0,999 444	1,103 190 528 582
23	5,5	0,016 666	0,016 666
		0,999 444	0,998 671 033 980
24	5,0	0,033 333	0,033 333
		0,999 444	0,998 176 130 307
25	4,5	0,05	0,05
		0,999 444	0,999 405 254 280
26	4,0	0,066 666	0,066 666
		0,999 444	0,999 465 722 991
27	3,6	0,08	0,08

		0,999 444	0,999 414 217 996
28	3,2	0,093 333	0,093 333
		0,999 444	0,999 425 894 470
29	2,8	0,106 666	0,106 666
		0,999 444	0,999 422 976 814
30	2,4	0,12	0,12
		0,999 444	0,999 425 456 091
31	2,1	0,13	0,13
		0,999 444	0,999 426 203 731
32	1,8	0,14	0,14
		0,999 444	0,999 427 237 565
33	1,5	0,15	0,15
		0,999 444	0,999 427 069 069
34	1,2	0,16	0,16
		0,999 444	0,999 426 888 760
35	1,0	0,166 666	0,166 666
		0,999 444	0,999 426 345 349
36	0,8	0,173 333	0,173 333
		0,999 444	0,999 425 737 289
37	0,6	0,18	0,18
		0,999 444	0,999 423 877 295
38	0,4	0,186 666	0,186 666
		0,999 444	0,999 421 046 023
39	0,3	0,19	0,19
		0,999 444	0,999 417 937 806
40	0,2	0,193 333	0,193 333
		0,999 444	0,999 411 230 025
41	0,1	0,196 666	0,196 666
		0,999 444	0,999 398 927 031
42	0,0	0,2	0,2
		0,999 444	0,999 332 983 564
43	0,0	0,2	0,2
		0,0	-0,000 072 354 768
44	0,0	0,1	0,1
		0,0	-0,000 049 335 028
45	0,0	0,0	0,0
		0,0	-0,000 071 548 416

7.3 Propagação de uma Onda Linear

Aqui nesta seção será simulada numericamente a evolução no tempo de uma onda linear. Para solucionar o problema é necessário fornecer como dado inicial o perfil da superfície da onda e o seu potencial de velocidades correspondente.

Recordando a seção 5.2 vemos que a cota da superfície livre para uma onda linear é dada pela equação (5.7), onde agora a amplitude terá um valor estabelecido $a = 0,001\ 333$

$$z (x, t) = d + a \cos (kx - Wt) \quad (7.1)$$

colocando os termos em forma adimensional ($k = 2 \pi$) pois $\lambda = 1$, temos

$$z (x, t) = d + a \cos (2\pi x - Wt) \quad (7.2)$$

O potencial de velocidade " $u(x,z,t)$ " é dado pela equação (5.6) e agora terá uma amplitude " a " conhecida

$$u(x,z,t) = \frac{a\ g}{W} \frac{\cosh (kz)}{\cosh (kd)} \sin (kx - Wt) \quad (7.3)$$

Colocando os termos em unidades adimensionais ($g = 1$) fica

$$u(x,z,t) = \frac{a}{W} \frac{\cosh (kz)}{\cosh (kd)} \sin (2\pi x - Wt) \quad (7.4)$$

A frequência angular da onda linear pode ser obtida por intermédio da relação de dispersão vista na equação (5.11)

$$W = \sqrt{g\ k\ \tanh (kd)} \quad (7.5)$$

que em unidades adimensionais é dada por

$$W = \sqrt{2 \pi \tanh (2 \pi d)} \quad (7.6)$$

Adotando um comprimento de onda " $\lambda = 1$ " e uma altura d'água em repouso " $d = 0,133\ 333$ " tem-se " $W \cong 2,074\ 026$, sendo o valor correspondente para águas profundas :

$$\tanh (2 \pi d) \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad W = \sqrt{2 \pi} = 2,506\ 628 .$$

A teoria da onda linear então fornece uma solução analítica do problema para um determinado ponto da onda e um determinado instante

$$a = 0,001\ 3333$$

$$d = 0,133\ 333 \quad \text{que conduz a} \quad W \cong 2,074\ 026$$

$$z(x,t) = d + 0,001\ 333\ 3 \cos (2 \pi x - 2,074\ 026\ t)$$

$$u(x,z,t) = 0,000\ 643 \sin (2 \pi x - 2,074\ 026\ t)$$

$$\tau = 2\pi / W = 3,03$$

$$c = L / \tau = 1 / 3.03 = 0.330\ 091$$

Pode-se observar que os valores adotados para " a " e " d " permitem ficar em uma classe de onda onde a teoria linear provê bons resultados, pois " $a / d = H / d = 0,01 \leq 0,02$ ". A altura relativa " $d / \lambda = 0,133\ 333$ " situa esta onda na classe das ondas lineares progressivas intermediárias pois $0,05 < d / \lambda < 0,5$.

A condição inicial da superfície livre para resolver o problema de valor de contorno e valor inicial é obtida pela equação (7.2) e (7.4) no tempo " $t = 0$ "

$$\bar{z}(x,0) = 0,133\ 333 + 0,001\ 333\ 3 \cos (2 \pi x) \quad (7.9)$$

$$\bar{u}(x,\bar{z},0) = \frac{0,001\ 333\ 3}{\sqrt{2 \pi \tanh (2 \pi 0,133\ 333)}} \sin (2 \pi x) =$$

$$= 0,000\ 643 \sin (2 \pi x) \quad (7.10)$$

DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO

Para facilidade de resolução do modelo numérico será considerada a periodicidade da onda em relação ao espaço, sendo modelado numericamente apenas um comprimento de onda " λ ", através de uma truncagem vertical nas extremidades e impondo a estas paredes à esquerda e à direita condições de igualdade de potencial de velocidades " $u_e = u_d$ " e igualdade de velocidade normal com direções iguais e sentidos opostos " $p_e = -p_d$ " conforme pode ser visto na figura 7.3.1. O fundo terá velocidade normal nula.

Como o fundo " Γ_1 " da figura 7.3.1 tem velocidade normal nula foi usado o processo de resolução por rebatimento do ponto fonte (ver seção 2.12) para evitar a discretização do fundo.

O contorno foi aproximado usando 61 nós (31 elementos de contorno quadráticos) sobre a superfície livre " Γ_3 " e 11 nós (5 elementos de contorno quadráticos) em cada contorno truncado " Γ_2 " e " Γ_4 " da figura 7.3.1.

A figura 7.3.2 mostra o perfil da onda linear para um " $\Delta t = 0.1$ " e passos 1, 50, 100, 150 e 200. A figura 7.3.3 mostra a mesma onda nos passos 1, 700, 800, 900 e 1000. Estes 1000 passos corresponderam ao tempo de 100 unidades. Observa-se nos perfis que a forma da onda manteve-se boa mesmo nos últimos passos só mudando o seu nível médio. Este exemplo rodou 30 horas na estação SUN, modelo Sparc station 2, sem dividir tempo de programação com outro programa. A Tabela 7.3.1 mostra o Nível Médio da Água e a Energia Total decrescendo com o passar do tempo. Também compara a cota " z " calculada pelo MEC relativa a uma coordenada " x " com a cota " z " calculada teóricamente pela fórmula (7.1) usando a mesma coordenada " x ". Nota-se que o erro do MEC está no terceiro algarismo significativo. A Figura 7.3.4 representa o gráfico com o desenvolvimento das energia cinética, potencial e total como também do Nível Médio da Água.

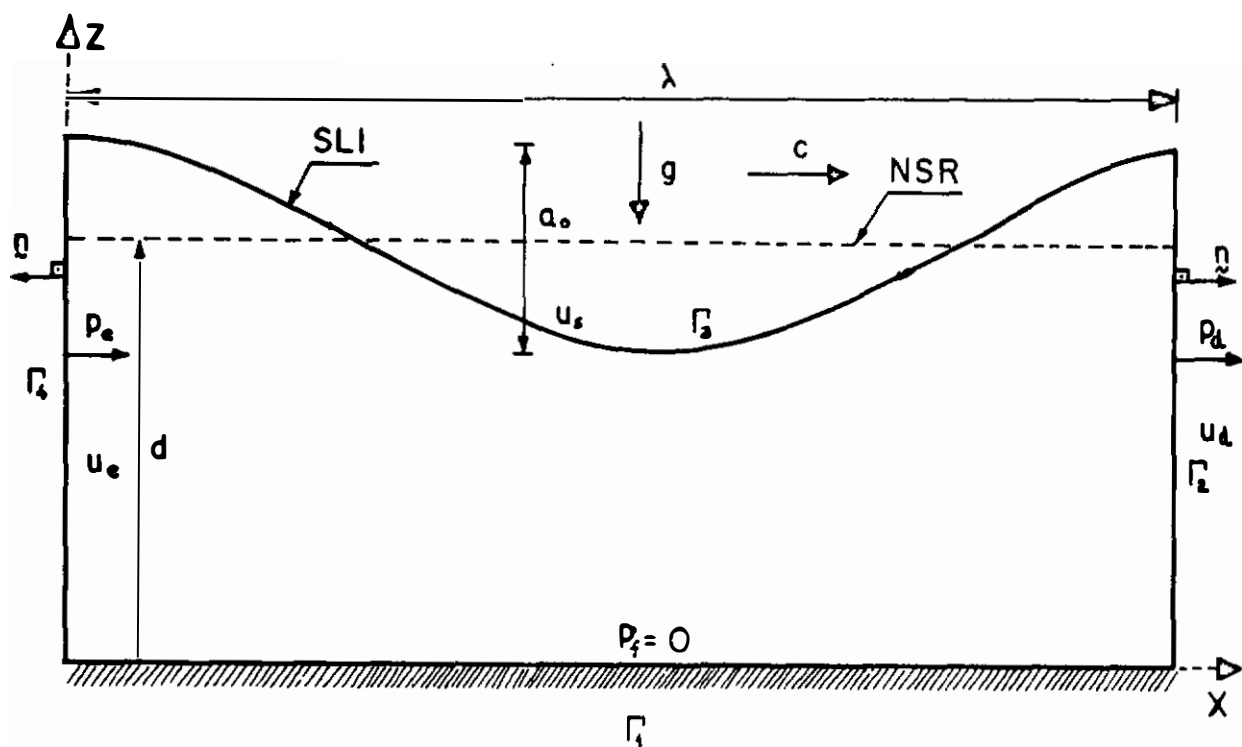


Figura 7.3.1 - Condição inicial de propagação da Onda Linear e das Ondas Não Lineares. SLI= Superfície Livre Inicial gerada pelas equações (7.2) e (7.9), c = celeridade, g = gravidade, u_s = Potencial de Fluxo gerado pela equação (7.4).

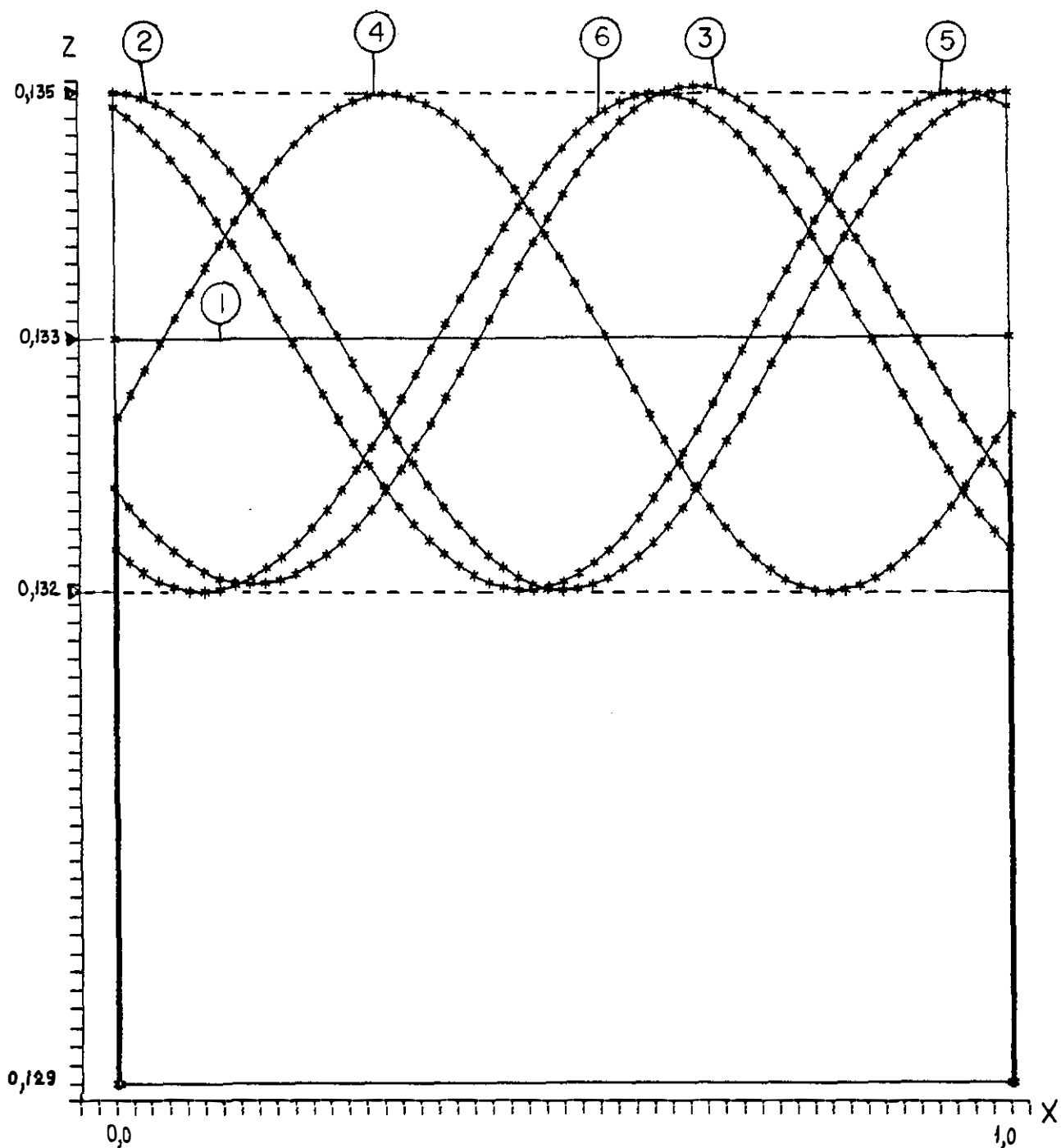


Figura 7.3.2 - Evolução da Superfície livre de uma ONDA LINEAR para um $\Delta t = 0,1$. Perfil da Superfície Livre = PSL . Tempo = t . Legenda : (1) PSL em Repouso ; (2) Condição Geométrica Inicial ; (3) PSL no passo 50 ($t = 5,0$) ; (4) PSL no passo 100 ($t = 10,0$) ; (5) PSL no passo 150 ($t = 15,0$) ; (6) PSL no passo 200 ($t = 20,0$) ; Amplitude inicial (H) = 0,002 666 ; Profundidade (d) = 0,133 333 ; Período (τ) = 3,03 .

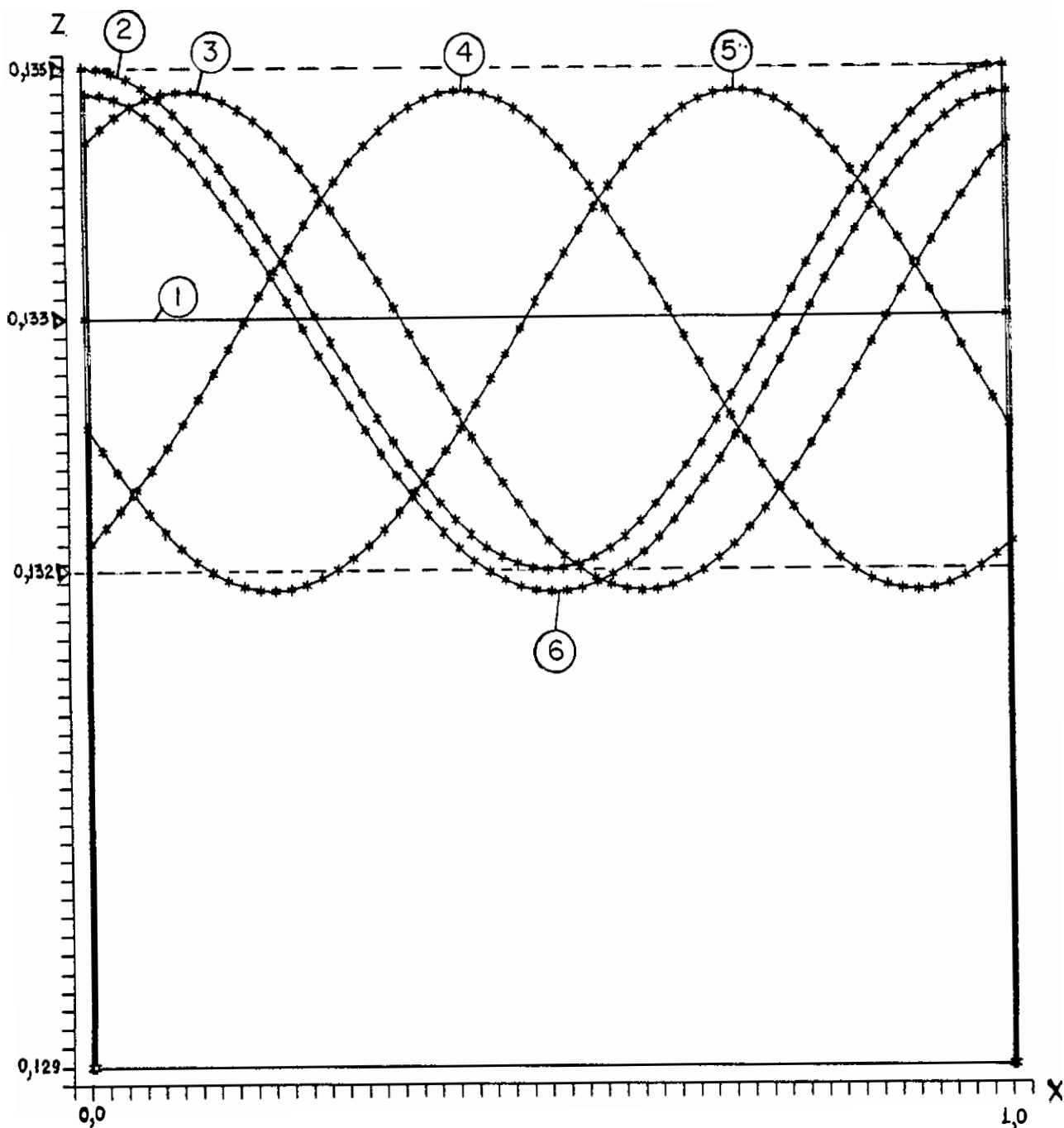


Figura 7.3.3 - Evolução da Superfície livre de uma ONDA LINEAR para um $\Delta t = 0,1$. Perfil da Superfície Livre = PSL . Tempo = t . Legenda : (1) PSL em Repouso ; (2) Condição Geométrica Inicial ; (3) PSL no passo 700 ($t = 70,0$) ; (4) PSL no passo 800 ($t = 80,0$) ; (5) PSL no passo 900 ($t = 90,0$) ; (6) PSL no passo 1000 ($t = 100,0$) ; Amplitude inicial (H) = 0,002 666 ; Profundidade (d) = 0,133 333 ; Período (τ) = 3,03 .

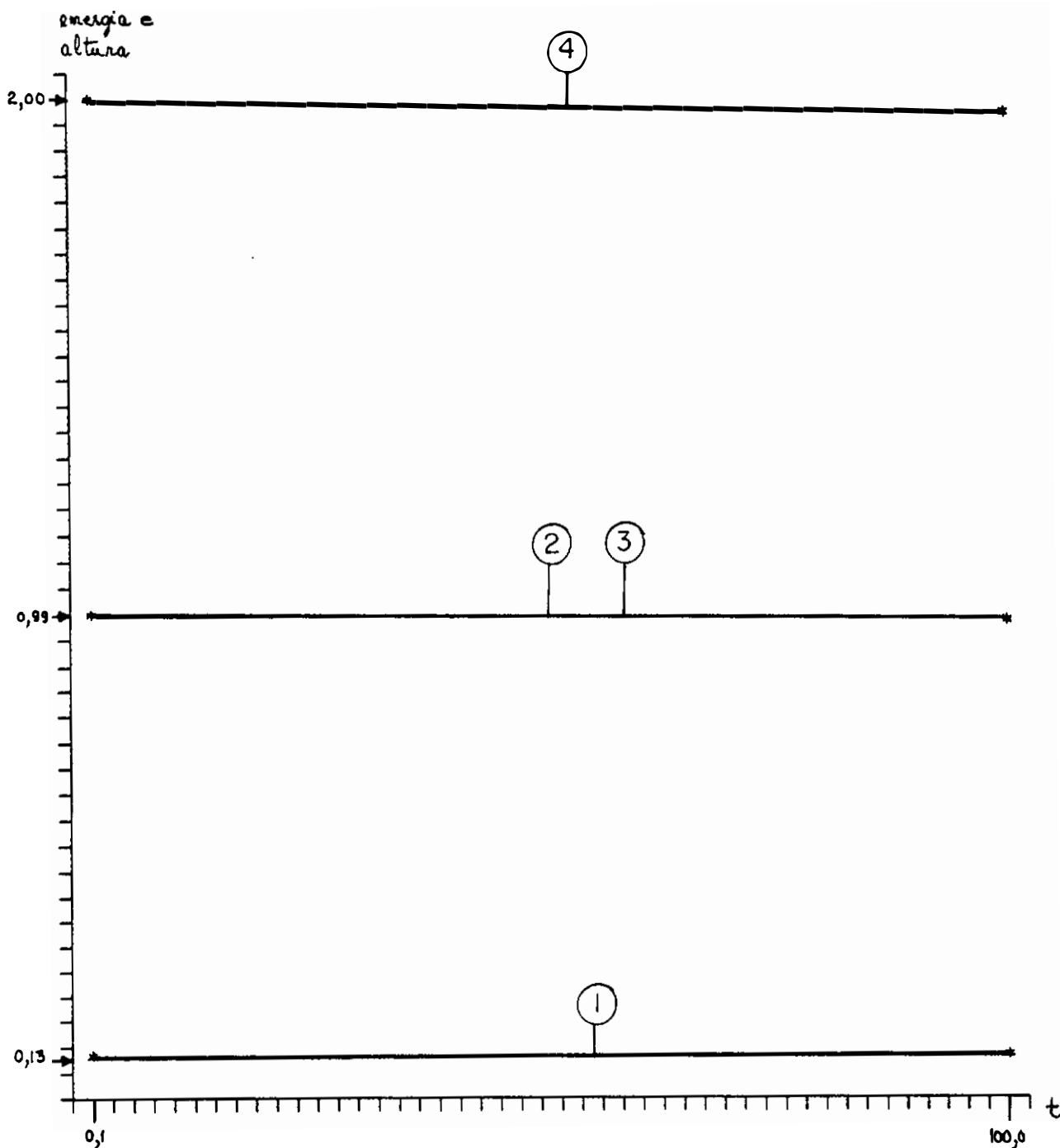


Figura 7.3.4 - Nível Médio da Água (1), Energia Potencial (2), Energia Cinética (3), Energia Total (4) referentes a evolução da superfície livre de uma ONDA LINEAR com $\Delta t = 0,1$ no período de tempo compreendido entre 0,1 e 100,0.

Tabela 7.3.1 - Coordenadas (x,z) do ponto central da superfície da Onda Linear, Nível Médio da Água (NMA) , Energias Cinética (EC), Potencial(EP) e Total(ET) .

Passo Tempo		x(MEC)	z(MEC) z(analítico)		NMA	
			EC	EP	ET	
1	0,1	0,498 598	0,132 030	0,132 031	0,133 333	
			1,000 004	0,999 996	2,000 000	
10	1	0,497 341	0,134 004	0,133 995	0,133 331	
			1,000 046	0,999 911	1,999 957	
20	2	0,500 737	0,134 019	0,134 051	0,133 330	
			1,000 000	0,999 809	1,999 809	
30	3	0,499 248	0,132 032	0,132 002	0,133 328	
			0,999 853	0,999 637	1,999 490	
40	4	0,497 363	0,133 895	0,133 923	0,133 326	
			0,999 632	0,999 395	1,999 028	
50	5	0,500 820	0,134 102	0,134 119	0,133 324	
			0,999 340	0,999 176	1,998 516	
100	10	0,497 510	0,133 761	0,133 772	0,133 316	
			0,998 809	0,998 726	1,997 536	
150	15	0,500 106	0,132 046	0,332 062	0,133 307	
			0,997 770	0,997 797	1,995 567	
505	50,5	0,502 549	0,133 917	0,133 997	0,133 245	
			0,993 140	0,992 739	1,985 879	
550	55	0,499 415	0,132 462	0,132 588	0,133 237	
			0,992 924	0,992 314	1,985 238	
600	60	0,503 032	0,132 796	0,132 902	0,133 229	
			0,991 545	0,991 882	1,983 427	
650	65	0,500 781	0,134 530	0,134 613	0,133 220	
			0,991 007	0,991 246	1,982 254	
700	70	0,500 355	0,132 151	0,132 285	0,133 211	
			0,990 794	0,990 223	1,981 017	
750	75	0,503 682	0,133 155	0,133 306	0,133 203	
			0,989 671	0,989 593	1,979 264	
800	80	0,500 789	0,134 315	0,134 443	0,133 194	
			0,988 938	0,989 557	1,978 494	
850	85	0,501 429	0,131 958	0,132 083	0,133 165	
			0,988 421	0,988 082	1,976 503	

900	90	0,504 118	0,133 539	0,133 712	0,133 177
			0,988 195	0,987 505	1,975 699
950	95	0,500 896	0,133 968	0,134 168	0,133 168
			0,986 549	0,987 471	1,974 020
1000	100	0,502 589	0,131 879	0,132 001	0,133 159
			0,986 367	0,986 343	1,972 710

Na figura 7.3.4 observa-se as medidas de conservação (Energia Total e Nível Médio da Água) durante a propagação da onda. O sistema montado neste trabalho recebeu uma equação a mais na solução matemática para garantir o equilíbrio de velocidade (seção 2.13). Por este motivo o fluxo que atravessa a fronteira é nulo e não serve como medida de conservação. A energia total e suas duas componentes, energia cinética e potencial, são normalizadas pela energia cinética por comprimento de onda dadas pela teoria da onda linear.

Como prevê a teoria da onda linear (de Airy), a energia cinética e potencial são iguais e permanecem iguais com a propagação da onda.

-

7.4 Propagação das Ondas Não Lineares

Aqui nesta seção serão vistos quatro casos de propagação de onda não linear apresentados em Azevedo [4]. Em todos eles a condição inicial do perfil da superfície livre e do seu correspondente potencial de velocidades para a simulação numérica será igual a da onda linear vista na seção 7.3. Esse tipo de condição inicial já foi adotado pelos autores da referência [11] e [4] e sua interpretação física pode ser obtida nestas referências .

As variáveis estão em unidades adimensionais .

A tabela 7.4.1 resume os dados de entrada principais dos problemas a serem abordados.

Notar que " $d / L = 0.133 \ 333$ " enquadra essas ondas em águas intermediárias, ou seja, " $0,05 < d / L < 0,5$ " .

Observa-se que com o aumento da amplitude da onda, mantendo todas as demais variáveis iguais, o perfil da onda que se propaga se deforma com maior rapidez, sendo que para o caso da amplitude mais alta estudada, a onda instabiliza e interrompe a simulação antes de completar um período.

Tabela 7.4.1 - Amplitude, profundidade e suas relações para a propagação de ondas Não Lineares (NL) .

Análise	$a = a / L$	$d = d / L$	a / d
Levemente N.L.	0,001 333 3	0,133 333	1 % = 0,01
Medianamente N.L.	0,013 333	0,133 333	10 % = 0,10
Altamente N.L.	0,026 666	0,133 333	20 % = 0,20
Onda Rebentando	0,066 666	0,133 333	50 % = 0,50

7.4.1 Onda Levemente Não Linear

Como na Onda Linear, o contorno foi aproximado usando 61 nós (31 elementos) sobre a superfície livre (" Γ_1 " da figura 7.3.1) e 11 nós (5 elementos) em cada contorno truncado (" Γ_2 " e " Γ_4 " da figura 7.3.1) . O fundo foi tratado por rebatimento do ponto fonte (seção 2.12) .

A instabilidade desta onda foi imposta pelo uso da altura " $d = 0,133\ 333$ ", que à enquadra na teoria da onda linear em águas intermediárias, porém o perfil e o potencial de velocidades inicial dado são os de uma onda linear em águas profundas.

A condição inicial (tempo = zero) da superfície livre foi

$$\bar{z}(x,0) = 0,133\ 333 + 0,001\ 333\ 3 \cos (2\pi x) \quad (7.11)$$

$$\bar{u}(x,\bar{z},0) = \frac{0,001\ 333}{\sqrt{2\ \pi}} \sin (2\pi x) \quad (7.12)$$

A figura 7.4.1.1 mostra a evolução do perfil da superfície livre por 4,8 não-dimensionais passos de tempo " $\Delta t = 0,1$ " , plotados a intervalos de tempo definidos na figura. Agora, diferentemente da onda linear, a forma da superfície livre vai mudando com o decorrer do tempo, conforme pode ser observado pela sua mudança de amplitude .

A figura 7.4.1.2 mostra a energia total e suas componentes, a energia cinética e a potencial, todas normalizadas pela energia potencial da correspondente onda linear. Diferentemente da onda linear com a energia cinética e potencial iguais e constantes ao longo do tempo esta tem suas energias com forma ondulatórias e opostas . A soma das duas, a energia total, permanece constante ao longo do tempo. O Nível Médio da Água ficou constante ao longo do tempo, seu declínio foi imperceptível para o período de tempo igual a 4,8.

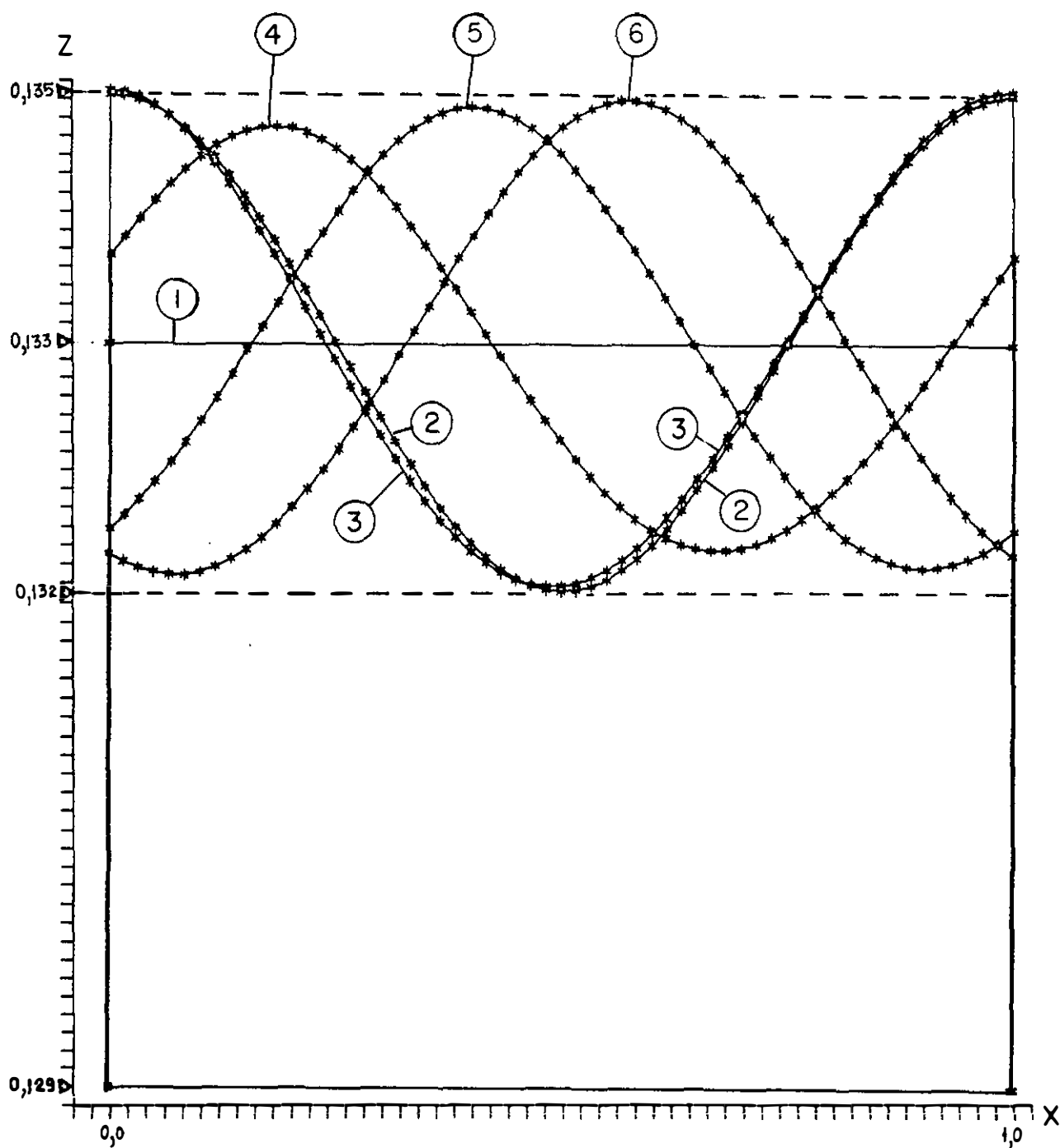


Figura 7.4.1.1 - Evolução da Superfície livre de uma ONDA LEVEMENTE NÃO LINEAR para um $\Delta t = 0,1$. Perfil da Superfície Livre = PSL. Tempo = t . Legenda : (1) PSL em Repouso ; (2) Condição Geométrica Inicial ; (3) PSL no passo 30 ($t = 0,3$) ; (4) PSL no passo 36 ($t = 3,6$) ; (5) PSL no passo 42 ($t = 4,2$) ; (6) PSL no passo 48 ($t = 4,8$) ; Amplitude inicial (H) = 0,002 666 ; Profundidade (d) = 0,133 333 ; Período (τ) = 2,506 628 .

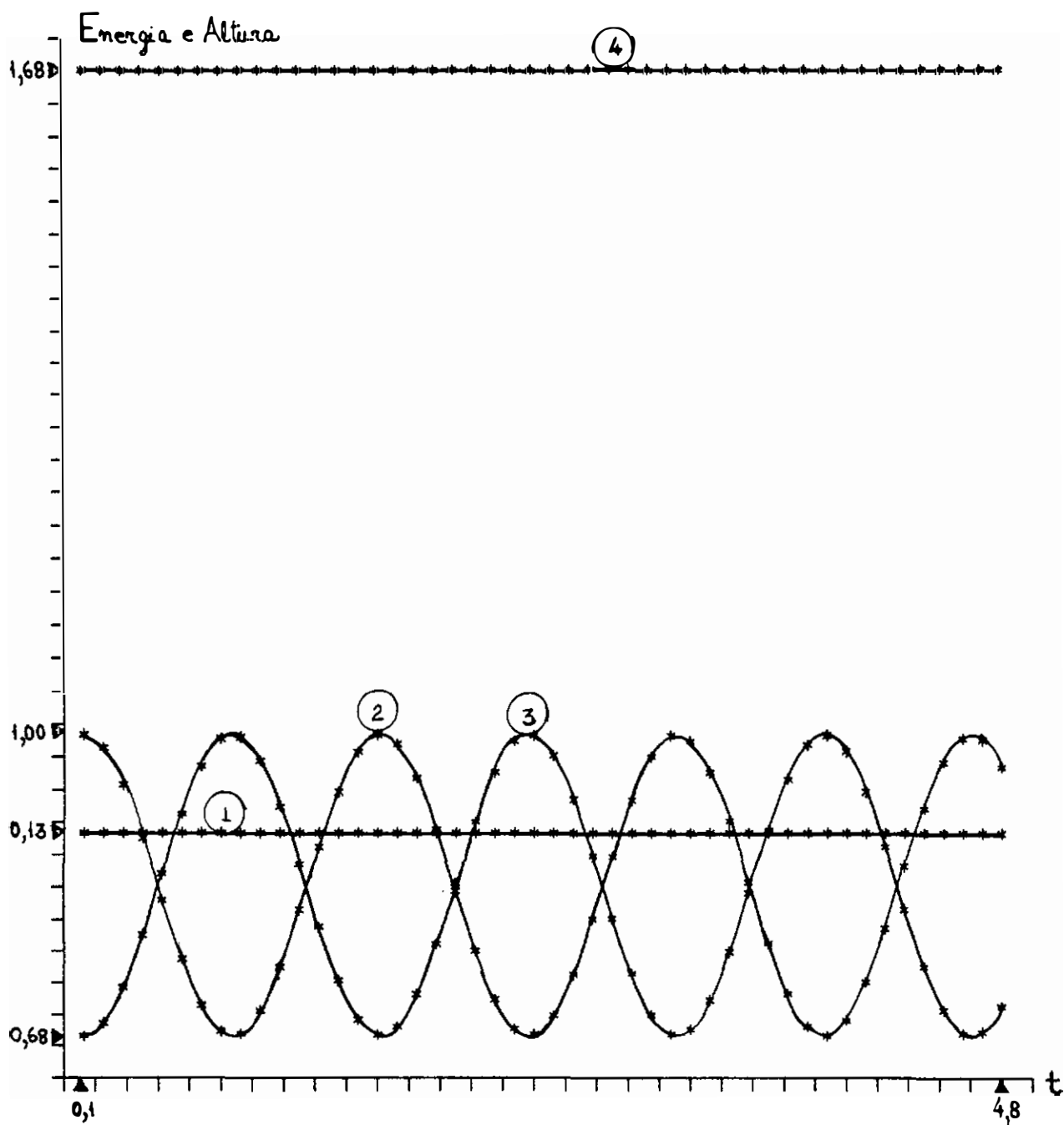


Figura 7.4.1.2 - Nível Médio da Água (1), Energia Potencial (2), Energia Cinética (3), Energia Total (4) referentes a evolução da superfície livre de uma ONDA LEVEMENTE NÃO LINEAR com $\Delta t = 0,1$ no período de tempo compreendido entre 0,1 e 4,8 .

7.4.2 Onda Medianamente Nao linear

Como na Onda Linear e Levemente Linear, o contorno foi aproximado usando 61 nós (31 elementos) sobre a superfície livre (" Γ_3 " da figura 7.3.1) e 11 nós (5 elementos) em cada contorno truncado (" Γ_2 " e " Γ_4 " da figura 7.3.1). O fundo foi tratado por rebatimento do ponto fonte (seção 2.12) .

Foram adotados neste caso 3 discretizações no tempo :

$$\Delta t = 0,100, \Delta t = 0,050 \text{ e } \Delta t = 0,025.$$

A amplitude dessa onda sendo 10 vezes maior que a levemente não linear torna a propagação desta muito mais instável que daquela.

Temos a seguinte condição inicial (tempo = 0,0) da superfície livre :

$$\bar{z}(x,0) = 0,133\ 333 + 0,013\ 333 \cos (2\pi x) \quad (7.13)$$

$$\bar{u}(x,\bar{z},0) = \frac{0,013\ 333}{\sqrt{2\ \pi}} \text{ sen } (2\pi x) \quad (7.14)$$

A figura 7.4.2.1 mostra a evolução do perfil da superfície livre por 48 passos no tempo com " $\Delta t = 0,1$ " . A figura 7.4.2.2 mostra as medidas de conservação para este caso.

A figura 7.4.2.3 mostra a evolução do perfil da superfície livre por 96 passos no tempo com " $\Delta t = 0,05$ " . A figura 7.4.2.4 mostra as medidas de conservação para este caso.

A figura 7.4.2.5 mostra a evolução do perfil da superfície livre por 192 passos no tempo com " $\Delta t = 0,025$ " . A figura 7.4.2.6 mostra as medidas de conservação para este caso.

Nos três casos citados observa-se que a onda é instável e seu perfil deforma-se ao longo do tempo. O aspecto da energia potencial e cinética é semelhante ao da onda levemente não linear .

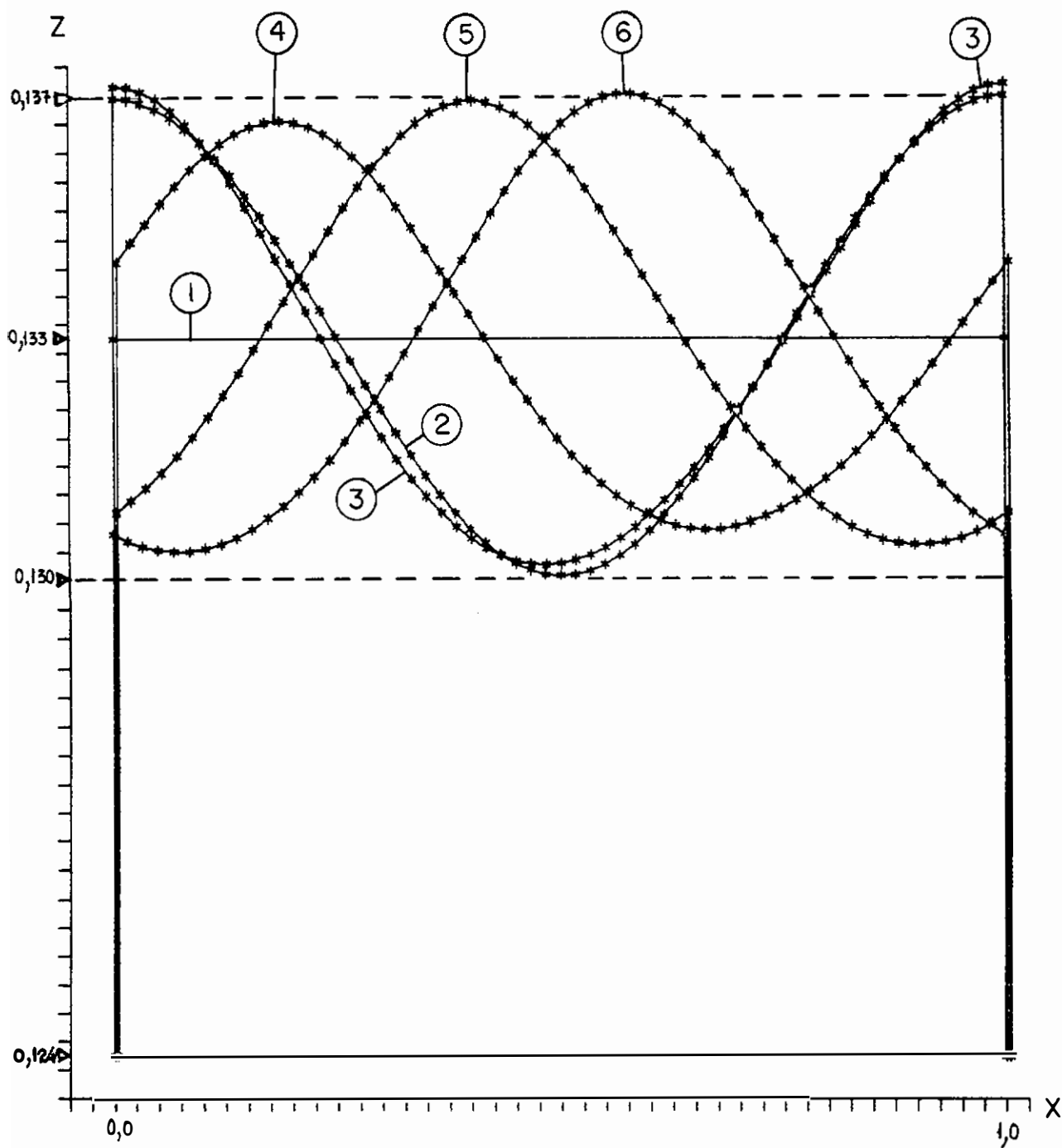


Figura 7.4.2.1 - Evolução da Superfície livre de uma ONDA MEDIANAMENTE NÃO LINEAR para um $\Delta t = 0,1$. Tempo = t . Perfil da Superfície Livre = PSL. Legenda : (1) PSL em Repouso; (2) Condição Geométrica Inicial; (3) PSL no passo 30 ($t = 3,0$); (4) PSL no passo 36 ($t = 3,6$); (5) PSL no passo 42 ($t = 4,2$); (6) PSL no passo 48 ($t = 4,8$). Amplitude inicial (H) = 0,026 666; Profundidade (d) = 0,133 333; Período (τ) = 2,506 628.

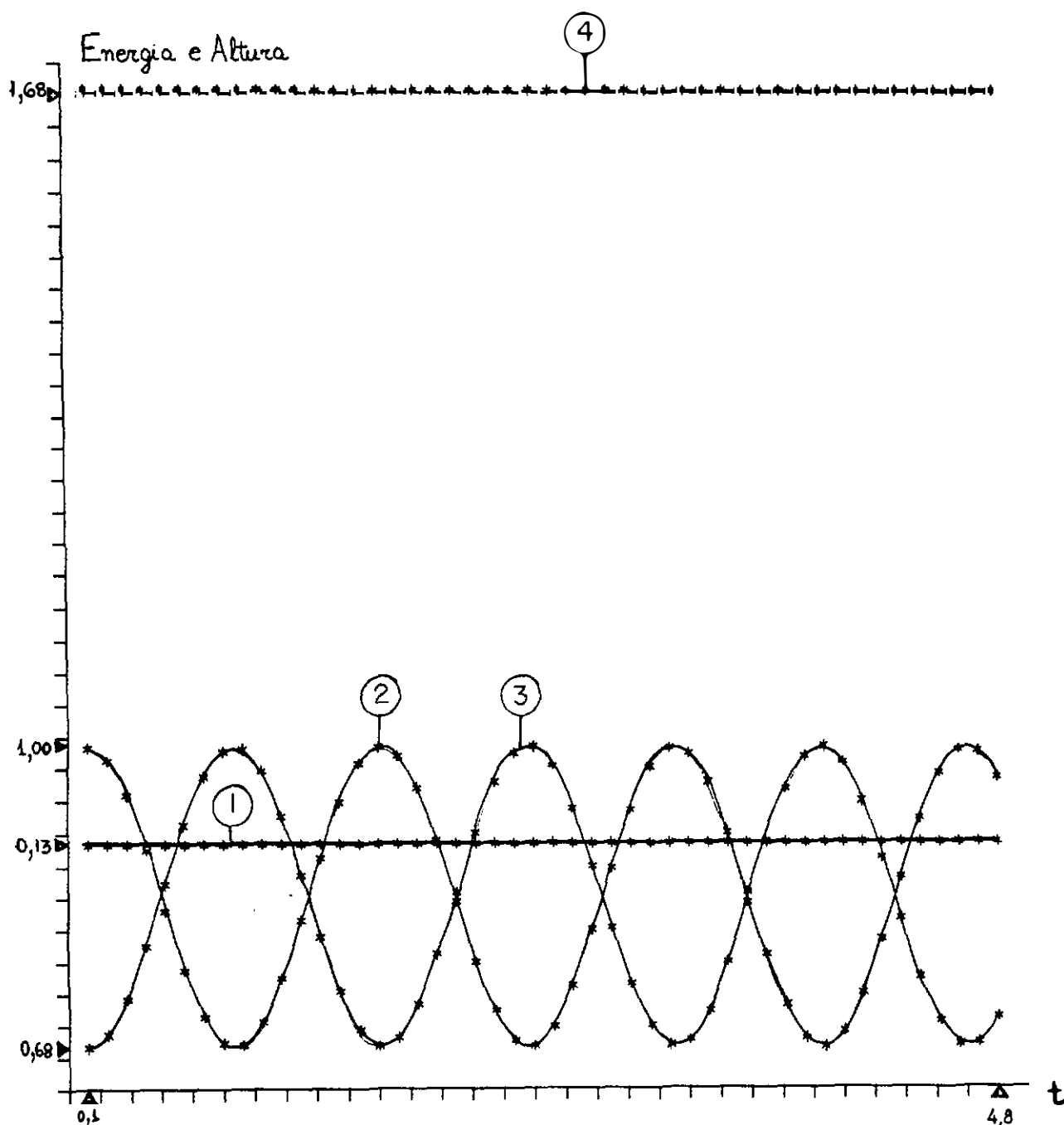


Figura 7.4.2.2 - Nível Médio da Água (1), Energia Potencial (2), Energia Cinética (3), Energia Total (4) referentes a evolução da superfície livre de uma ONDA MEDIANAMENTE NÃO LINEAR com $\Delta t = 0,1$ no período de tempo compreendido entre 0,1 e 4,8 .

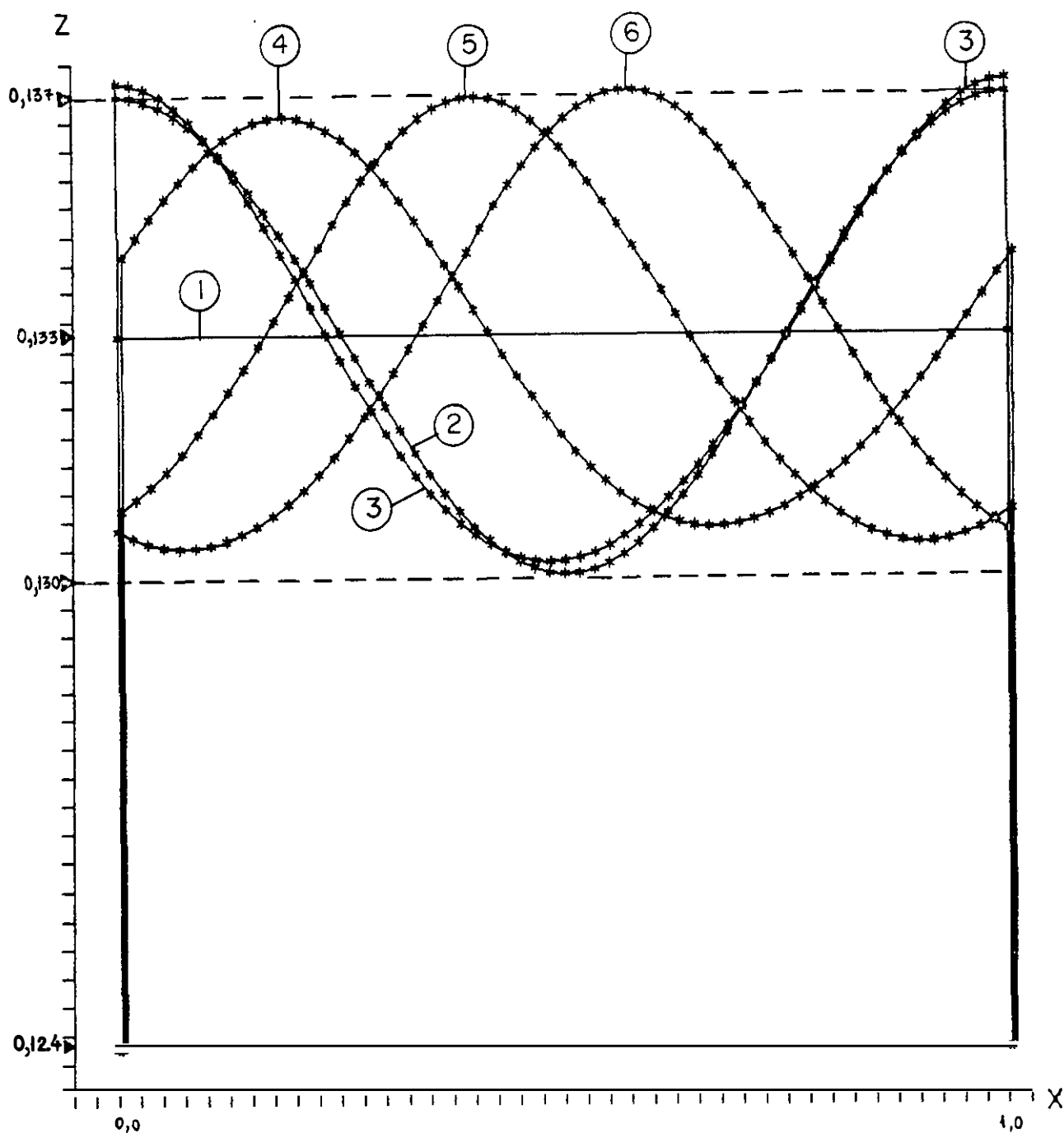


Figura 7.4.2.3 - Evolução da Superfície livre de uma ONDA MEDIANAMENTE NÃO LINEAR para um $\Delta t = 0,05$. Tempo = t . Perfil da Superfície Livre = PSL . Legenda : (1) PSL em Repouso ; (2) Condição Geométrica Inicial ; (3) PSL no passo 60 ($t = 3,0$) ; (4) PSL no passo 72 ($t = 3,6$) ; (5) PSL no passo 84 ($t = 4,2$) ; (6) PSL no passo 96 ($t = 4,8$) . Amplitude inicial (H) = 0,026 666 ; Profundidade (d) = 0,133 333 ; Período (τ) = 2,506 628.

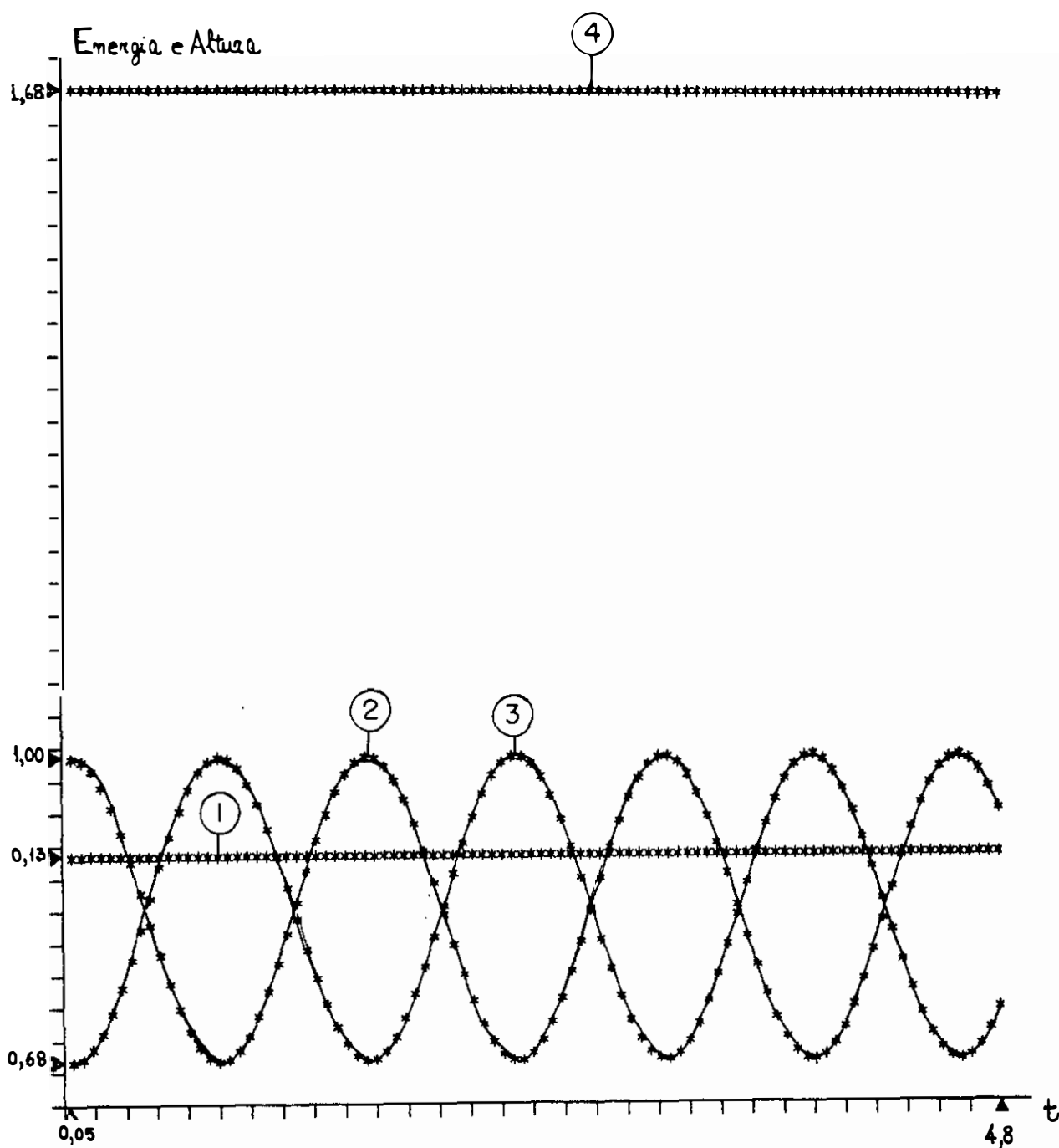


Figura 7.4.2.4 - Nível Médio da Água (1), Energia Potencial (2), Energia Cinética (3), Energia Total (4) referentes a evolução da superfície livre de uma ONDA MEDIANAMENTE NÃO LINEAR com $\Delta t = 0,05$ no período de tempo compreendido entre 0,1 e 4,8 .

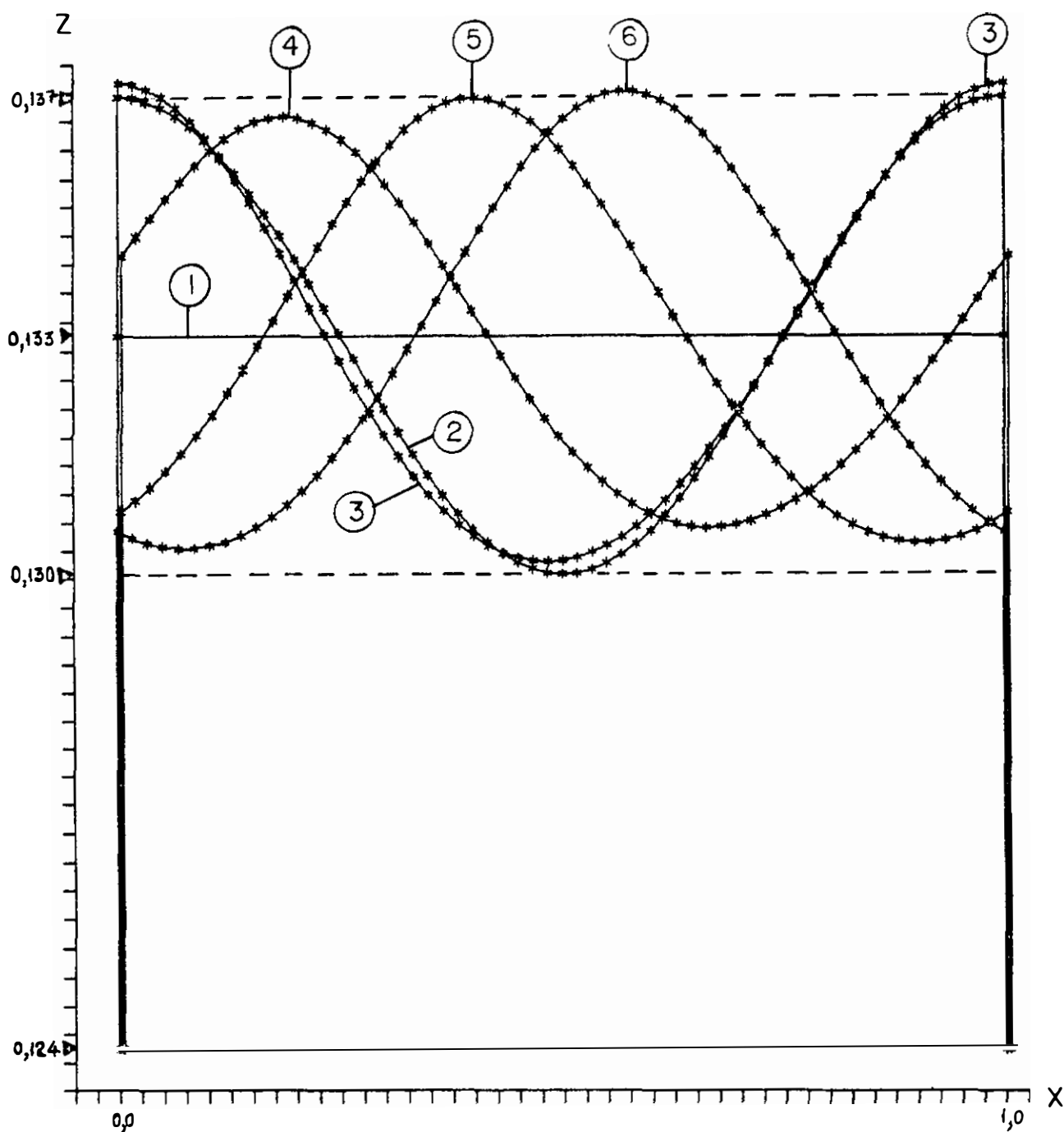


Figura 7.4.2.5 - Evolução da superfície livre de uma ONDA MEDIANAMENTE NÃO LINEAR para um $\Delta t = 0,025$. Tempo = t . Perfil da Superfície Livre = PSL . Legenda : (1) PSL em Repouso ; (2) Condição Geométrica Inicial ; (3) PSL no passo 120 ($t = 3,0$) ; (4) PSL no passo 144 ($t = 3,6$) ; (5) PSL no passo 168 ($t = 4,2$) ; (6) PSL no passo 192 ($t = 4,8$) ; Amplitude inicial (H) = 0,026 666 ; Profundidade (d) = 0,133 333 ; Período (τ) = 2,506 628.

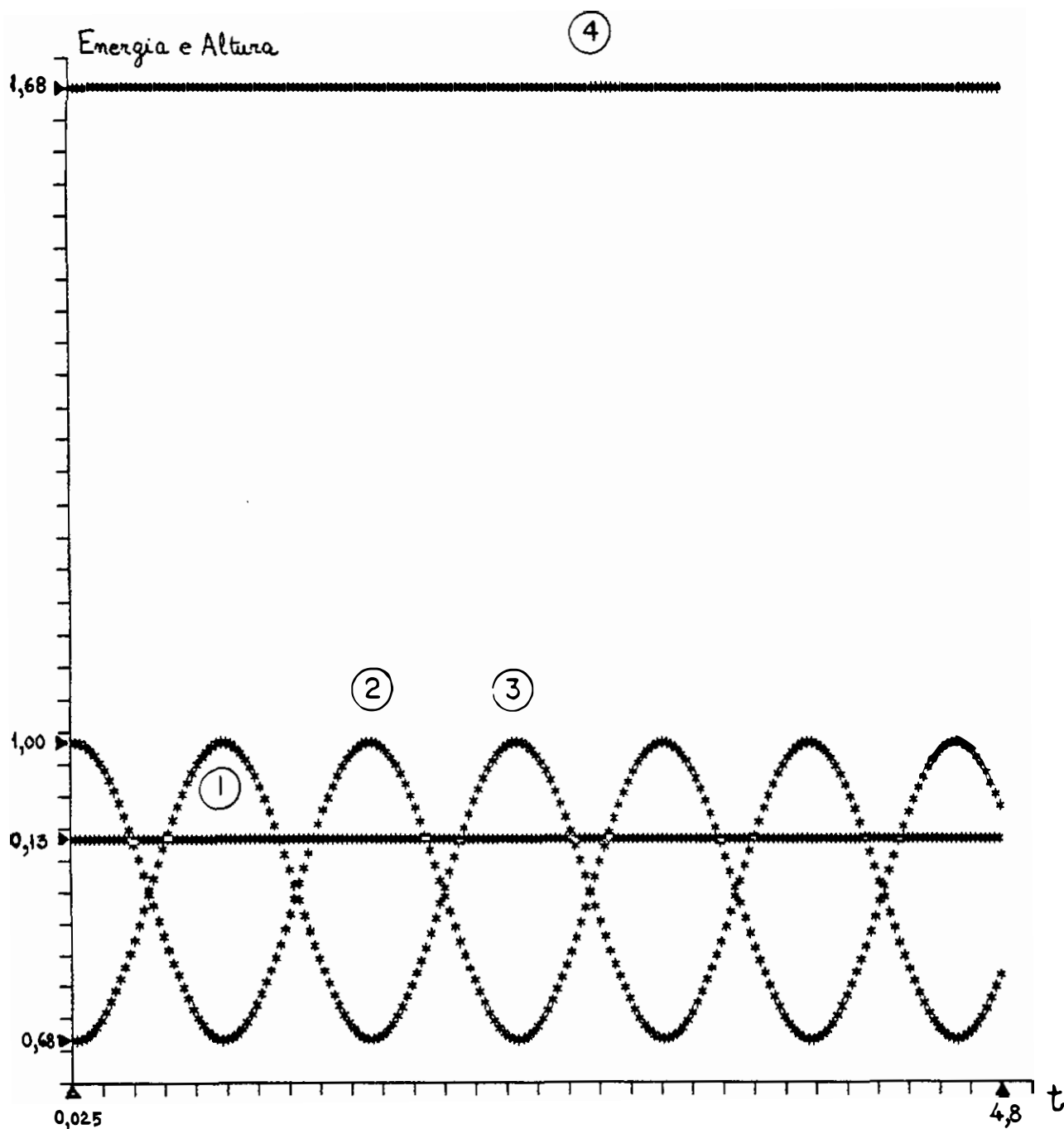


Figura 7.4.2.6 - Nível Médio da Água (1), Energia Potencial (2), Energia Cinética (3), Energia Total (4) referentes a evolução da superfície livre de uma ONDA MEDIANAMENTE NÃO LINEAR com $\Delta t = 0,025$ no período de tempo compreendido entre 0,1 e 4,8 .

7.4.3 Onda Altamente Não Linear

Como na onda linear e nas não lineares anteriores, o contorno foi aproximado usando 61 nós (31 elementos quadráticos) sobre a superfície livre (" Γ_1 " da figura 7.3.1) e 11 nós (5 elementos) em cada contorno truncado (" Γ_2 " e " Γ_4 " da figura 7.3.1) . O fundo foi tratado por rebatimento do ponto fonte (ver seção 2.12) .

Aqui também foram adotadas para comparação três discretizações no tempo :

$$\Delta t = 0,100, \Delta t = 0,050 \text{ e } \Delta t = 0,025 .$$

Como era de se esperar, a amplitude maior desta onda perturbou ainda mais sua propagação.

A condição inicial (tempo = 0,0) da superfície livre foi

$$\bar{z}(x,0) = 0,133\ 333 + 0,026\ 666 \cos (2\pi x) \quad (7.13)$$

$$\bar{u}(x,\bar{z},0) = \frac{0,026\ 666}{\sqrt{2\ \pi}} \sin (2\pi x) \quad (7.14)$$

A figura 7.4.3.1 mostra a evolução do perfil da superfície livre para um $\Delta t = 0,1$ durante 48 passos. A figura 7.4.3.2 mostra as medidas de conservação para este caso .

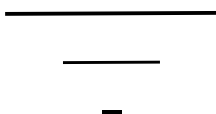
A figura 7.4.3.3 mostra a evolução do perfil da superfície livre para um $\Delta t = 0,05$ durante 96 passos. A figura 7.4.3.4 mostra as medidas de conservação para este caso .

A figura 7.4.3.5 mostra a evolução do perfil da superfície livre para um $\Delta t = 0,025$ durante 108 passos. A figura 7.4.3.6 mostra as medidas de conservação para este caso .

Para os dois primeiros casos ($\Delta t = 0,1$ e $0,05$) a onda conseguiu chegar no tempo 4,8. Para àquela em que o $\Delta t = 0,1$ o perfil apresentou uma linha em forma de dente de serra a partir do tempo 2,4 enquanto que àquela do tempo $\Delta t = 0,05$ o perfil em forma de dente de serra só apareceu no tempo 4,2 . Para o $\Delta t = 0,025$ no tempo 2,7 (passo 108) o perfil da onda deteriorou muito. Tudo parece indicar que

para a onda altamente não linear a escolha do " Δt " para a discretização adotada já se torna importante e que neste caso o " ∇t " que fornece melhores resultados deve estar próximo de 0,05 .

A energia total para o " $\Delta t = 0,025$ " decaiu muito a partir do tempo 2,7, porém antes disso manteve-se razoavelmente constante ao longo do tempo. Para o " $\Delta t = 0,1$ e 0,05 " a energia total apresentou uma queda lenta próximo ao fim do período .



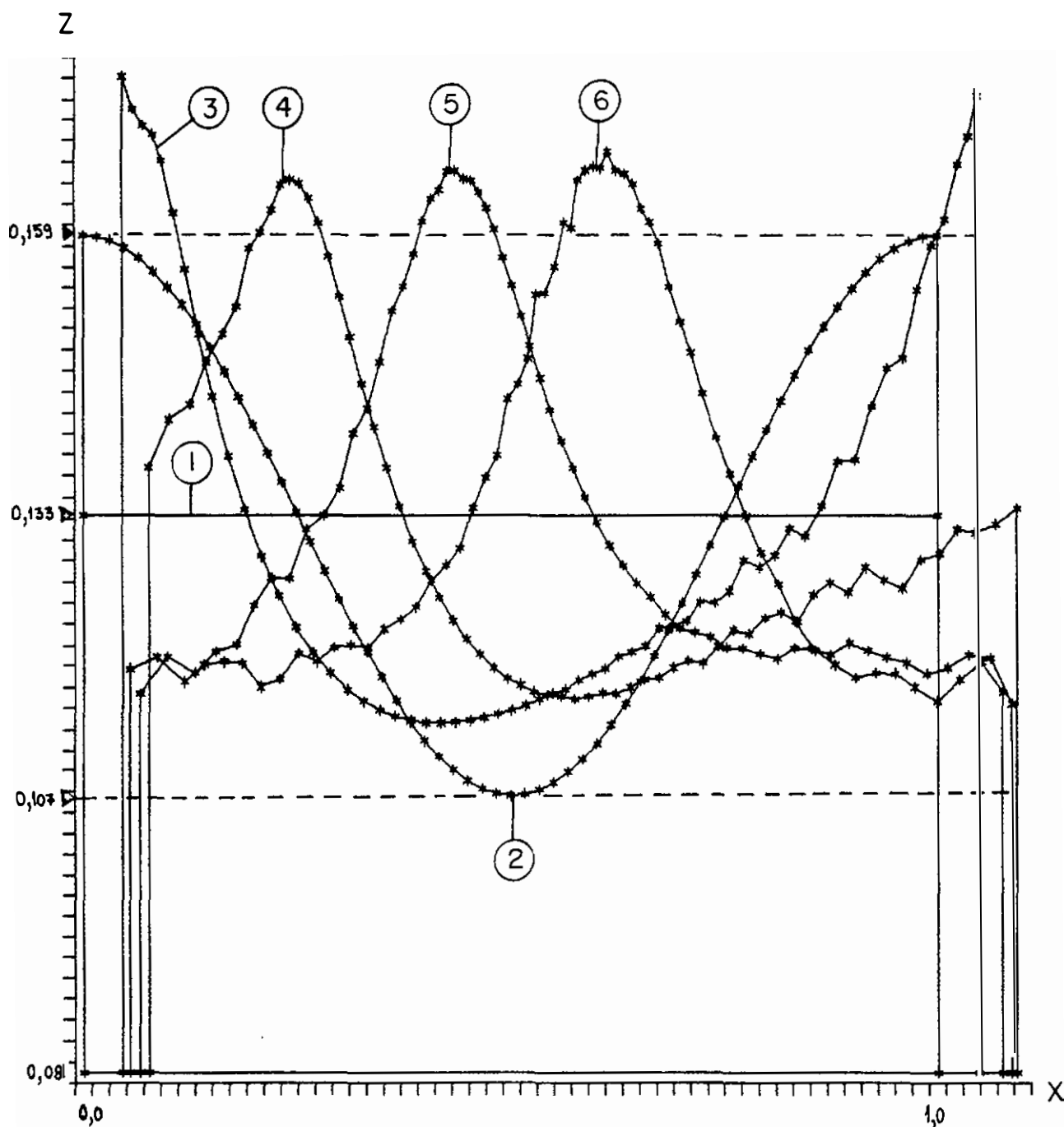


Figura 7.4.3.1 - Evolução da superfície livre de uma ONDA ALTAMENTE NÃO LINEAR para um $\Delta t = 0,1$. Tempo = t . Perfil da Superfície Livre = PSL. Legenda: (1) PSL em Repouso ; (2) Condição Geométrica Inicial ; (3) PSL no passo 30 ($t = 3,0$) ; (4) PSL no passo 36 ($t = 3,6$) ; (5) PSL no passo 42 ($t = 4,2$) ; (6) PSL no passo 48 ($t = 4,8$) ; Amplitude inicial (H) = 0,053 332 ; Profundidade (d) = 0,133 333 ; Período (τ) = 2,506 628.

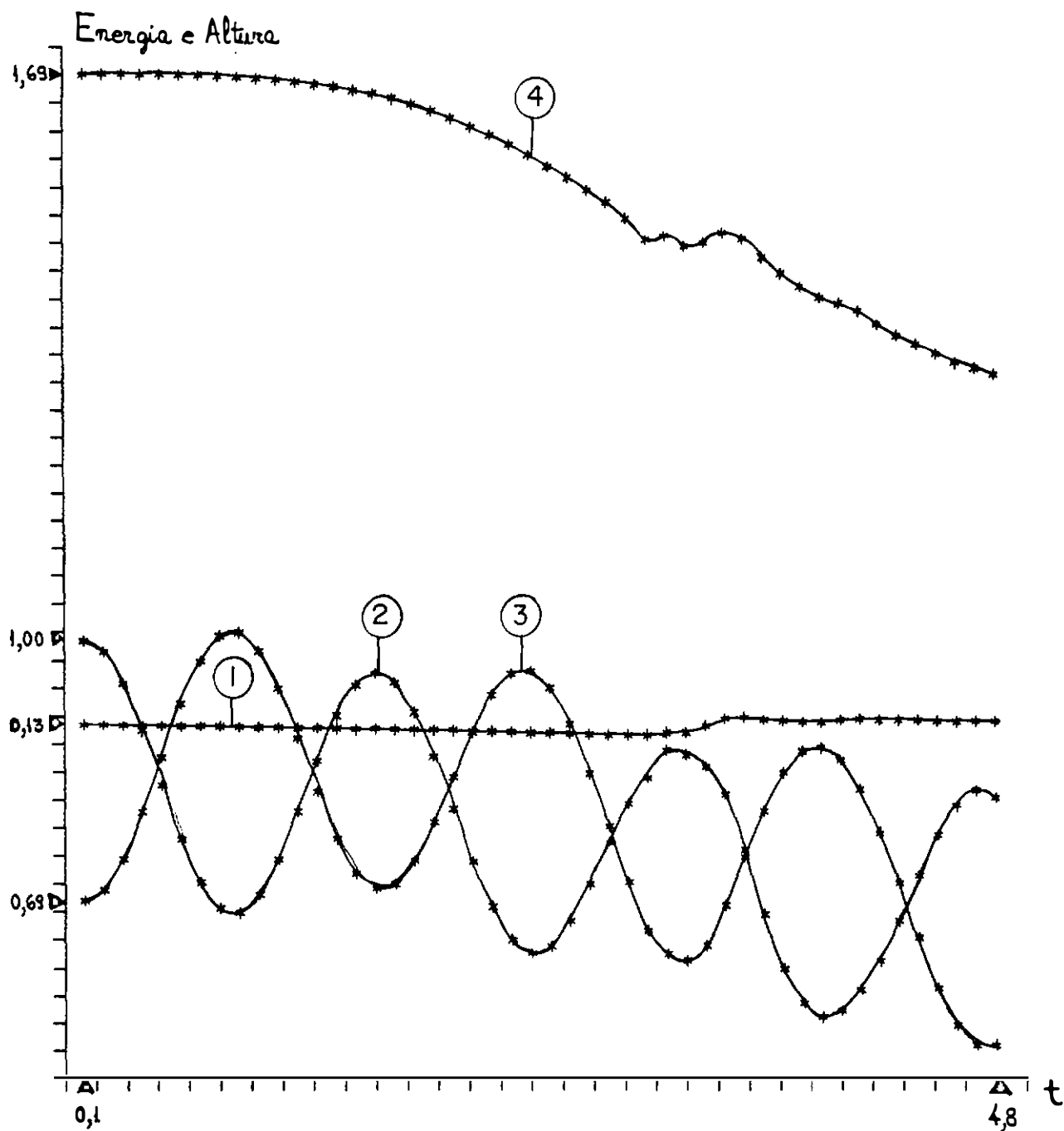


Figura 7.4.3.2 - Nível Médio da Água (1), Energia Potencial (2), Energia Cinética (3), Energia Total (4) referentes a evolução da superfície livre de uma ONDA ALTAMENTE NÃO LINEAR com $\Delta t = 0,1$ no período de tempo compreendido entre 0,1 e 4,8 .

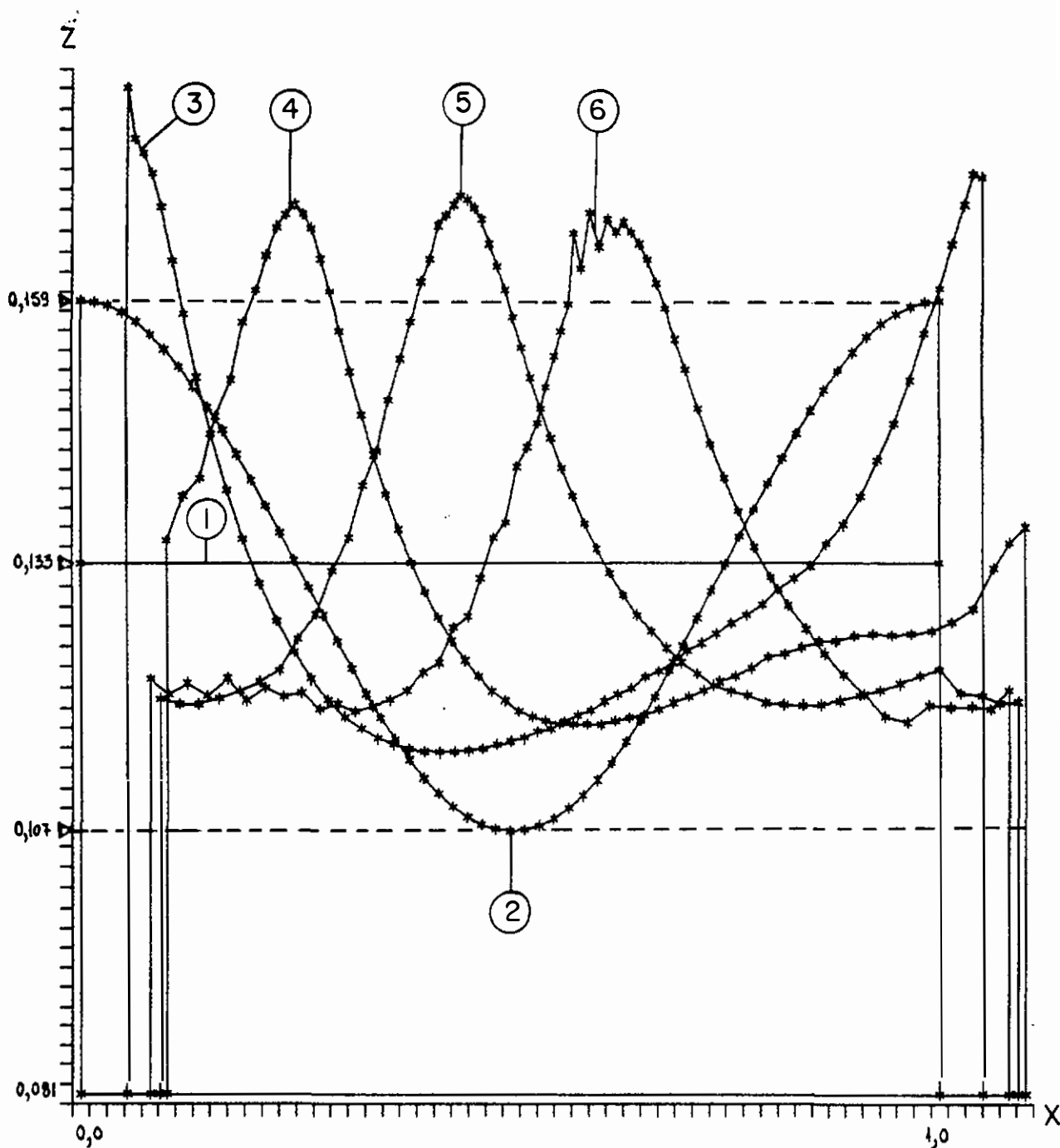


Figura 7.4.3.3 - Evolução da superfície livre de uma ONDA ALTAMENTE NÃO LINEAR para um $\Delta t = 0,05$. Tempo = t . Perfil da Superfície Livre = PSL. Legenda: (1) PSL em Repouso ; (2) Condição Geométrica Inicial ; (3) PSL no passo 60 ($t = 3,0$) ; (4) PSL no passo 72 ($t = 3,6$) ; (5) PSL no passo 84 ($t = 4,2$) ; (6) PSL no passo 96 ($t = 4,8$) ; Amplitude inicial (H) = 0,053 332 ; Profundidade (d) = 0,133 333 ; Período (τ) = 2,506 628.

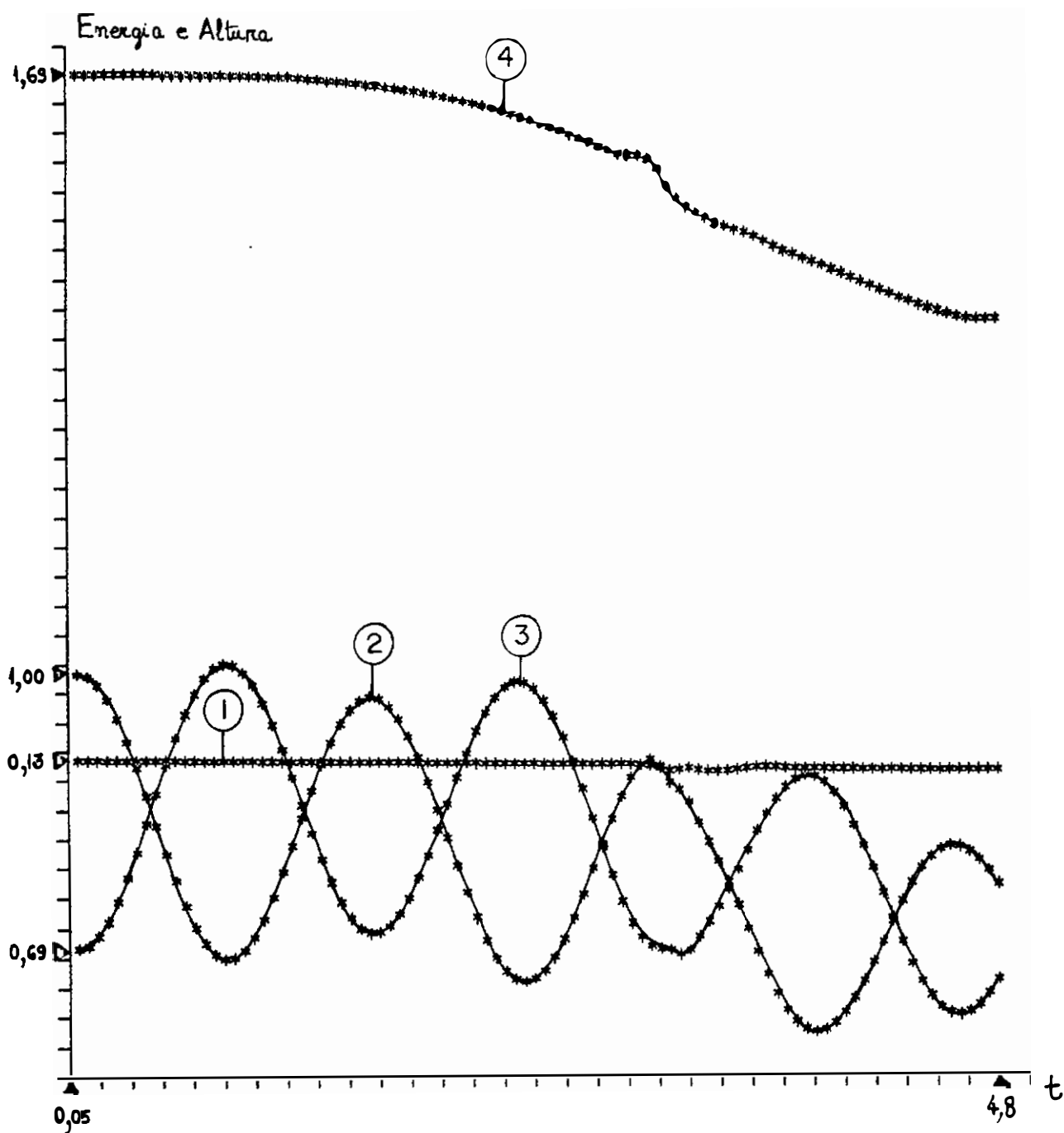


Figura 7.4.3.4 - Nível Médio da Água (1), Energia Potencial (2), Energia Cinética (3), Energia Total (4) referentes a evolução da superfície livre de uma ONDA ALTAMENTE NÃO LINEAR com $\Delta t = 0,05$ no período de tempo compreendido entre 0,1 e 4,8 .

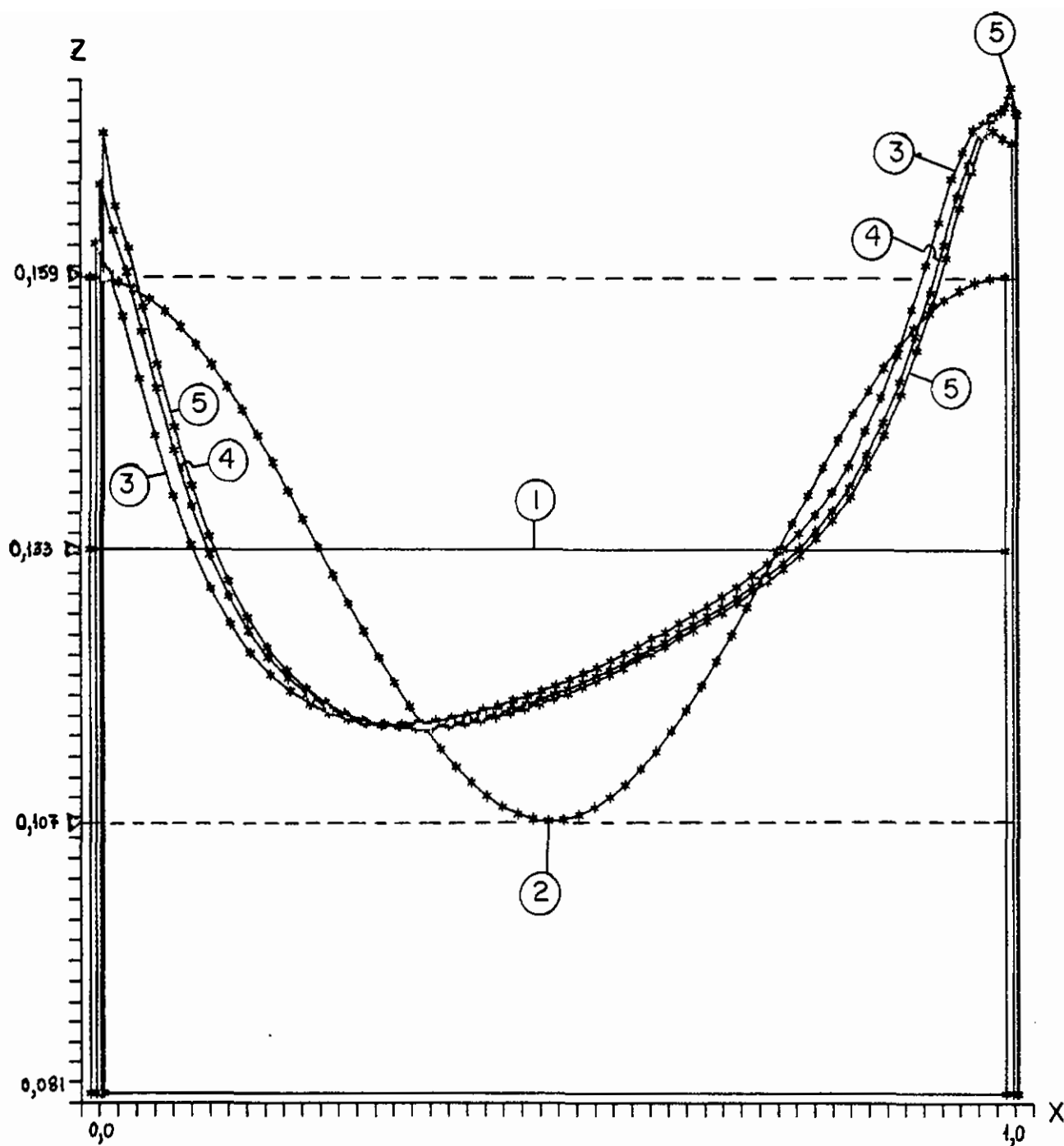


Figura 7.4.3.5 - Evolução da superfície livre de uma ONDA ALTAMENTE NÃO LINEAR para um $\Delta t = 0,025$. Tempo $= t$. Perfil da Superfície Livre = PSL. Legenda: (1) PSL em Repouso; (2) Condição Geométrica Inicial; (3) PSL no passo 108 ($t = 2,7$); (4) PSL no passo 110 ($t = 2,75$); (5) PSL no passo 111 ($t = 2,775$). Amplitude inicial (H) = 0,053332; Profundidade (d) = 0,133 333; Período (τ) = 2,506 628.

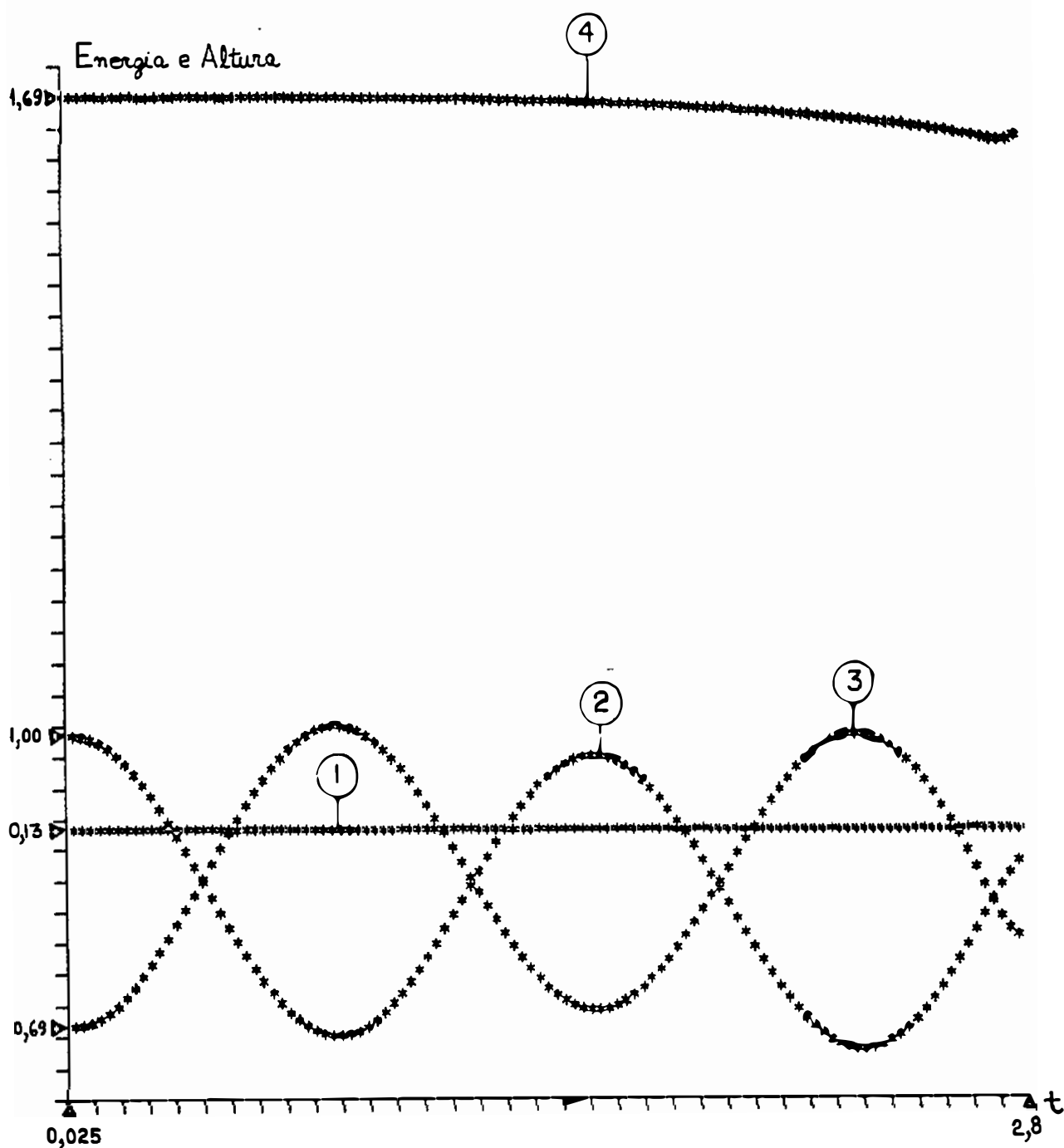


Figura 7.4.3.6 - Nível Médio da Água (1), Energia Potencial (2), Energia Cinética (3), Energia Total (4) referentes a evolução da superfície livre de uma ONDA ALTAMENTE NÃO LINEAR com $\Delta t = 0,025$ no período de tempo compreendido entre 0,1 e 2,775 .

7.4.4 Onda Rebentando

Como nas ondas anteriores desta seção o contorno foi aproximado usando 61 nós (31 elementos) sobre a superfície livre (" Γ_1 " da figura 7.3.1) e 11 nós (5 elementos) em cada contorno truncado (" Γ_2 " e " Γ_4 " da figura 7.3.1) . O fundo foi tratado por rebatimento do ponto fonte.

Devido a alta instabilidade desta onda ela foi propagada com diversos passos no tempo :

$$\Delta t = 0,1,$$

$$\Delta t = 0,05,$$

$$\Delta t = 0,025,$$

$$\Delta t = 0.006\ 25,$$

$$\Delta t = 0,001\ 562\ 5 .$$

A alta instabilidade não possibilitou essa onda passar do primeiro período. A amplitude adotada foi tão alta que a simulação da onda foi interrompida entre o tempo 0,7 e 0,96, dependendo do " Δt " adotado.

A condição inicial (tempo = 0,0) da superfície livre foi

$$\bar{z}(x,0) = 0,133\ 333 + 0,066\ 666 \cos (2\pi x) \quad (7.17)$$

$$\bar{u}(x,\bar{z},0) = \frac{0,066\ 666}{\sqrt{2\ \pi}} \text{sen} (2\pi x) \quad (7.18)$$

A figura 7.4.4.1 mostra a propagação do perfil da superfície livre para um passo no tempo $\Delta t = 0,1$. Para este passo no tempo instabilidades interromperam a simulação no tempo $t = 0,7$. As medidas de conservação deste caso estão na figura 7.4.4.2 .

A figura 7.4.4.3 mostra a propagação do perfil da superfície livre para um passo no tempo $\Delta t = 0,05$. Para este passo no tempo instabilidades interromperam a simulação no tempo $t = 0,8$. As medidas de conservação deste caso estão na figura 7.4.4.4 .

A figura 7.4.4.5 mostra a propagação do perfil da superfície livre para um passo no tempo $\Delta t = 0,025$. Para este passo no tempo instabilidades interromperam a simulação no tempo $t = 0,85$. As medidas de conservação deste caso estão na figura 7.4.4.6 .

A figura 7.4.4.7 mostra a propagação do perfil da superfície livre para um passo no tempo $\Delta t = 0,006\ 25$. Para este passo no tempo instabilidades interromperam a simulação no tempo $t = 0,962\ 5$. As medidas de conservação deste caso estão na figura 7.4.4.8 .

A figura 7.4.4.9 mostra a propagação do perfil da superfície livre para um passo no tempo $\Delta t = 0,001\ 562\ 5$. Para este passo no tempo instabilidades interromperam a simulação no tempo $t = 0,746\ 875$. As medidas de conservação deste caso estão na figura 7.4.4.10 . Este caso contrariou a tendência de subida do tempo de início da instabilidade com o decréscimo de " ∇t ". Possivelmente, como também o foi na onda altamente não linear, o " Δt " não foi adequado para a discretização adotada.

-

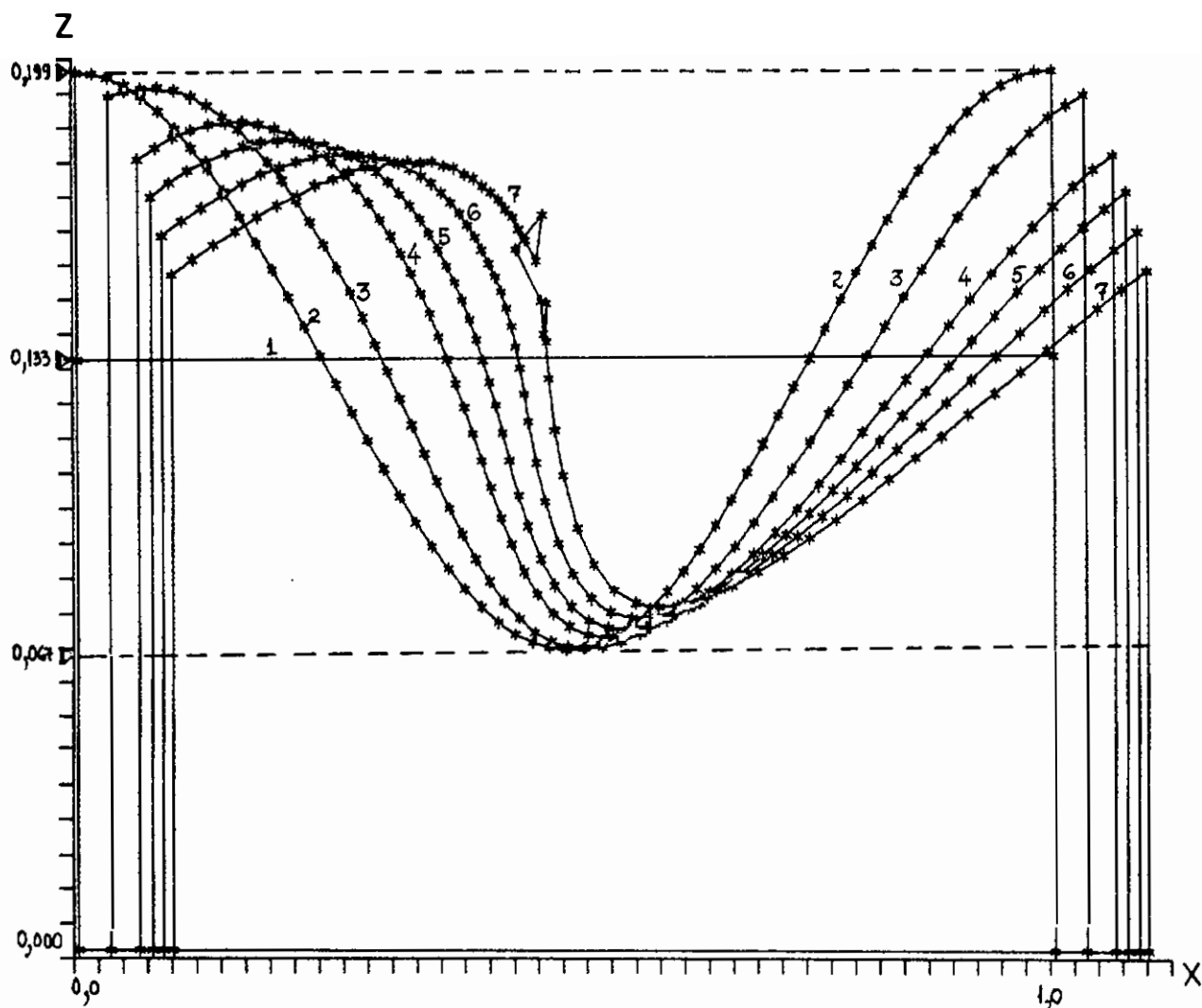


Figura 7.4.4.1 - Evolução da superfície livre de uma ONDA REBENTANDO para um $\Delta t = 0,1$. Tempo = t . Perfil da Superfície Livre = PSL. Legenda : (1) PSL em Repouso ; (2) Condição Geométrica Inicial ; (3) PSL no passo 2 ($t = 0,2$) ; (4) PSL no passo 4 ($t = 0,4$) ; (5) PSL no passo 5 ($t = 0,5$) ; (6) PSL no passo 6 ($t = 0,6$) ; (7) PSL no passo 7 ($t = 0,7$) ; Amplitude inicial (H) = 0,133 332 ; Profundidade (d) = 0,133 333 ; Período (τ) = 2,506 628.

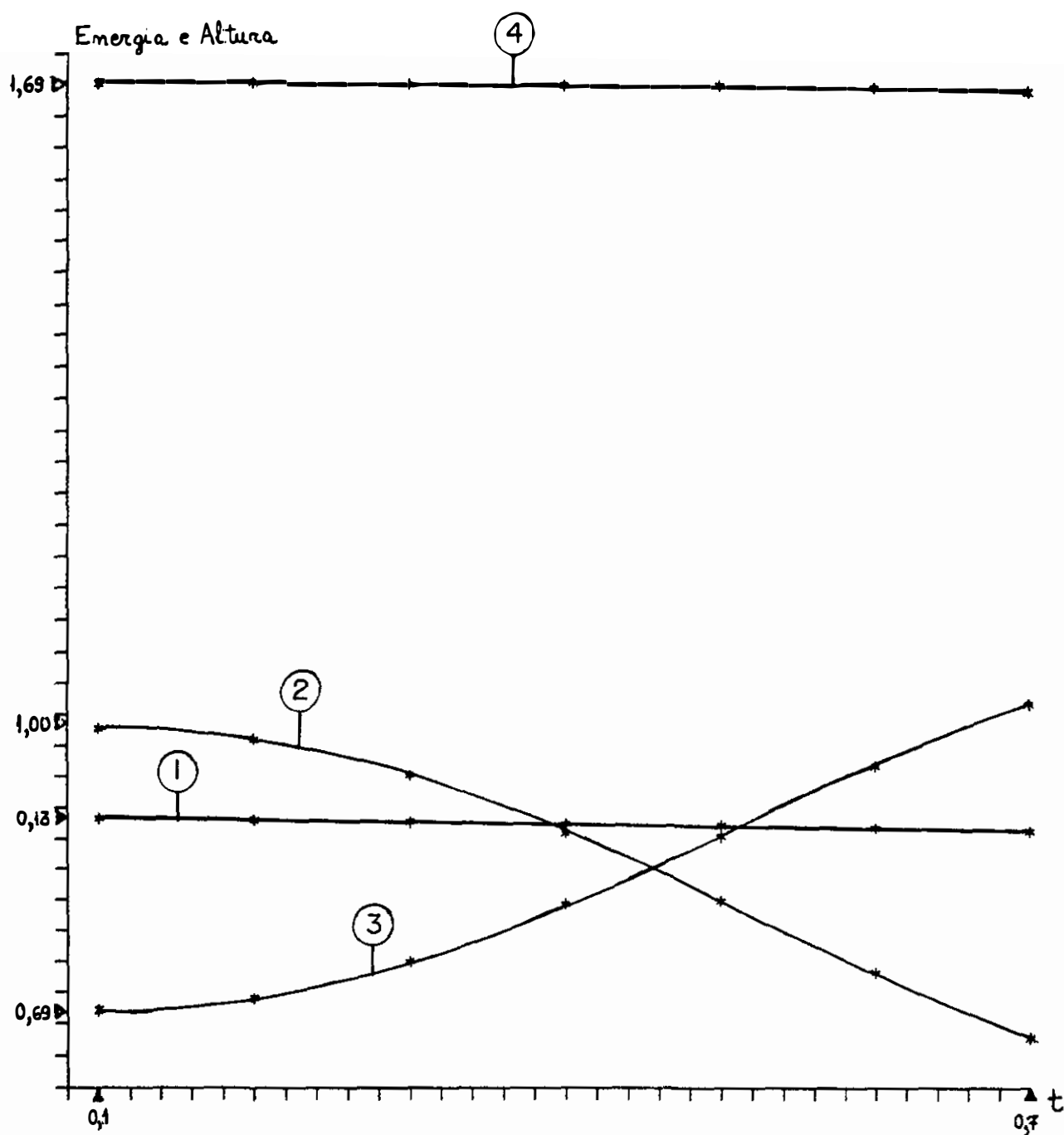


Figura 7.4.4.2 - Nível Médio da Água (1), Energia Potencial (2), Energia Cinética (3), Energia Total (4) referentes a evolução da superfície livre de uma ONDA REBENTANDO com $\Delta t = 0,1$ no período de tempo compreendido entre 0,1 e 0,7 .

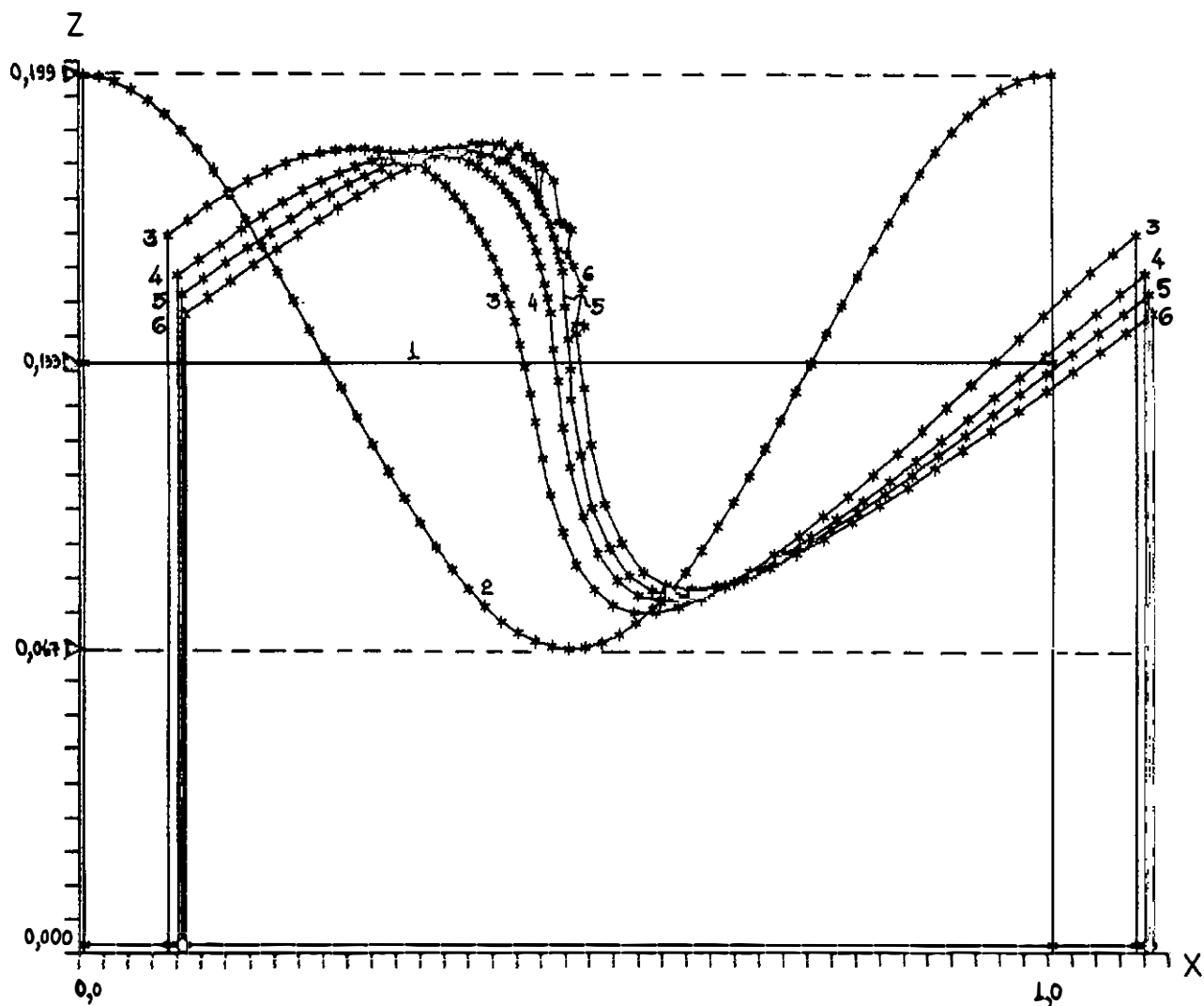


Figura 7.4.4.3 - Evolução da superfície livre de uma ONDA REBENTANDO para um $\Delta t = 0,05$. Tempo = t . Perfil da Superfície Livre = PSL. Legenda : (1) PSL em Repouso ; (2) Condição Geométrica Inicial ; (3) PSL no passo 12 ($t = 0,6$) ; (4) PSL no passo 14 ($t = 0,7$) ; (5) PSL no passo 15 ($t = 0,75$) ; (6) PSL no passo 16 ($t = 0,8$). Amplitude inicial (H) = 0,133 332 ; Profundidade (d) = 0,133 333 ; Período (τ) = 2,506 628.

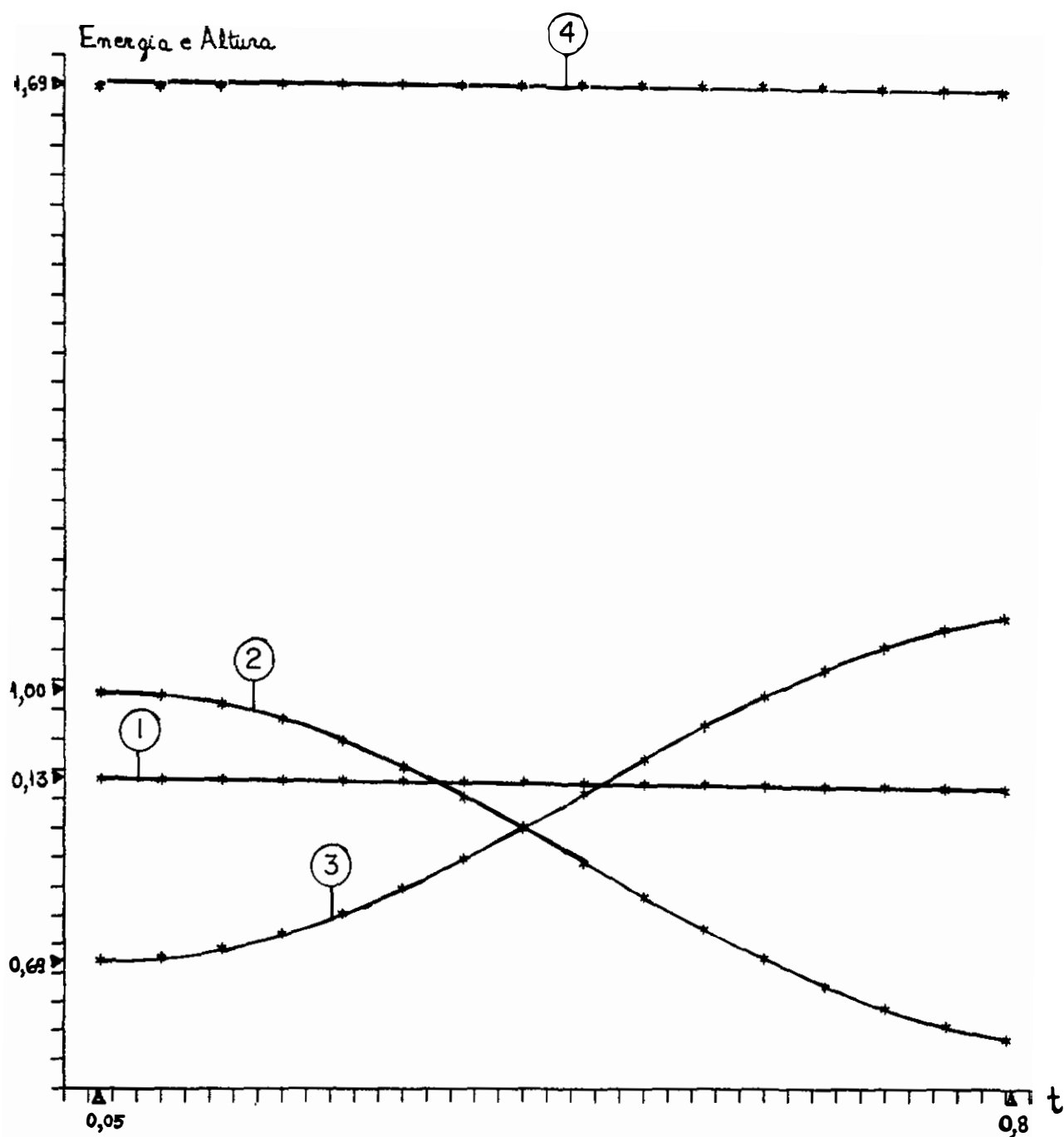


Figura 7.4.4.4 - Nível Médio da Água (1), Energia Potencial (2), Energia Cinética (3), Energia Total (4) referentes a evolução da superfície livre de uma ONDA REBENTANDO com $\Delta t = 0,05$ no período de tempo compreendido entre 0,1 e 0,8.

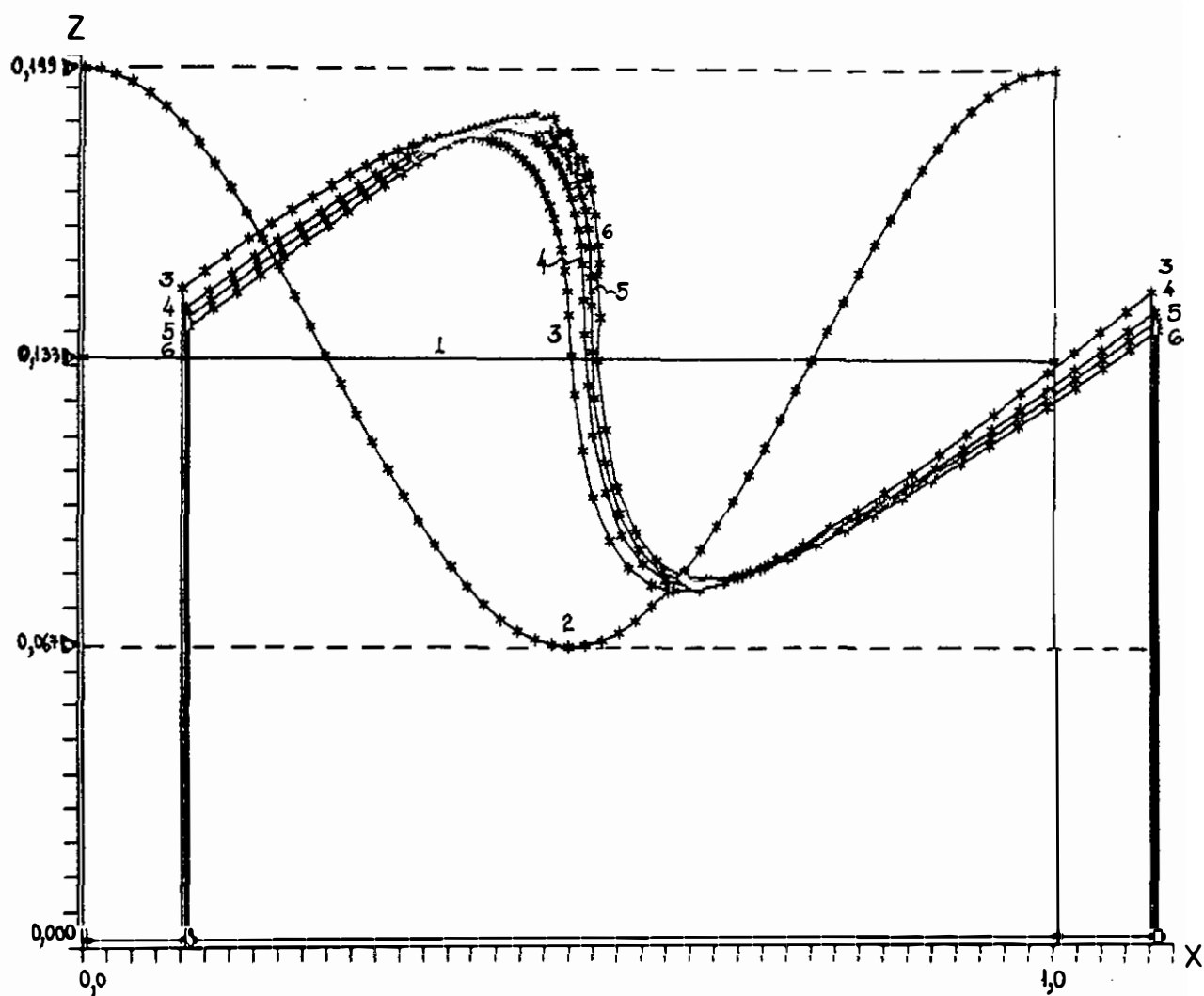


Figura 7.4.4.5 - Evolução da superfície livre de uma ONDA REBENTANDO para um $\Delta t = 0,025$. Tempo = t . Perfil da Superfície Livre = PSL. Legenda : (1) PSL em Repouso ; (2) Condição Geométrica Inicial ; (3) PSL no passo 30 ($t = 0,75$) ; (4) PSL no passo 32 ($t = 0,8$) ; (5) PSL no passo 33 ($t = 0,825$) ; (6) PSL no passo 34 ($t = 0,85$) . Amplitude inicial (H) = 0,133 332 ; Profundidade (d) = 0,133 333 ; Período (τ) = 2,506 628.

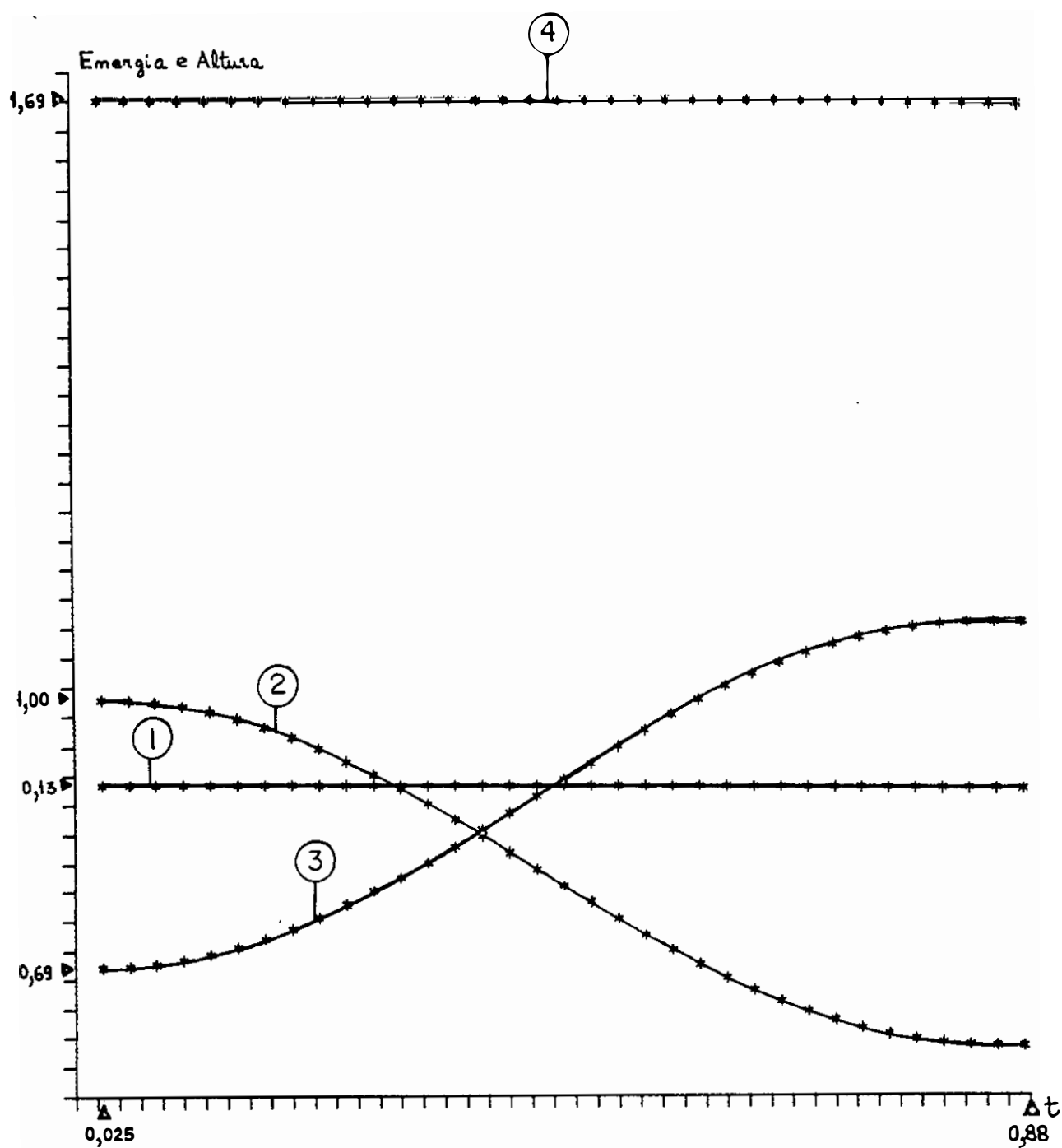


Figura 7.4.4.6 - Nível Médio da Água (1), Energia Potencial (2), Energia Cinética (3), Energia Total (4) referentes a evolução da superfície livre de uma ONDA REBENTANDO com $\Delta t = 0,025$ no período de tempo compreendido entre 0,1 e 0,85.

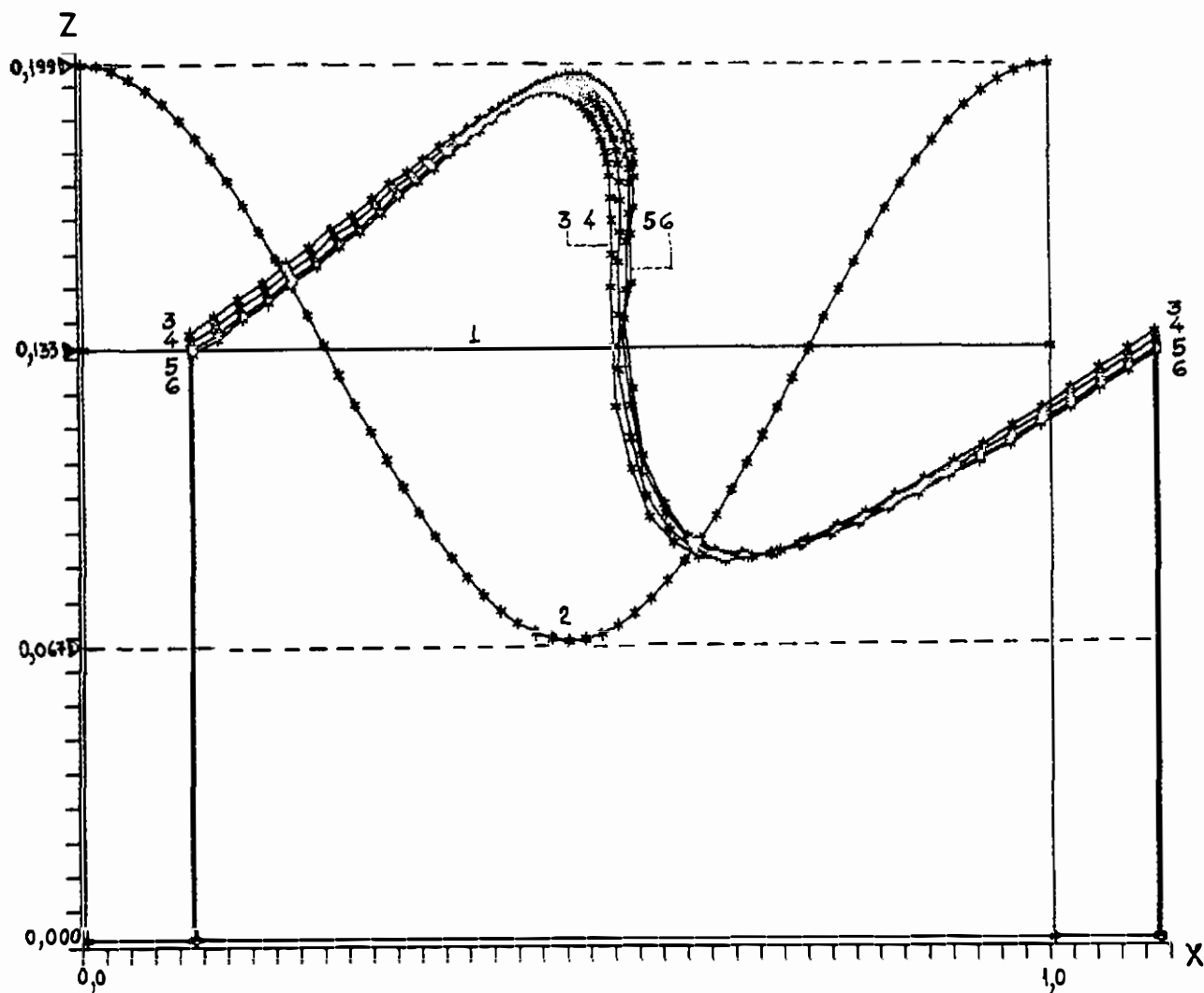


Figura 7.4.4.7 - Evolução da superfície livre de uma ONDA REBENTANDO para um $\Delta t = 0,006\ 250$. Tempo = t . Perfil da Superfície Livre = PSL. Legenda : (1) PSL em Repouso ; (2) Condição Geométrica Inicial ; (3) PSL no passo 144 ($t = 0,9$) ; (4) PSL no passo 148 ($t = 0,925$) ; (5) PSL no passo 152 ($t = 0,95$) ; (6) PSL no passo 154 ($t = 0,9625$) ; Amplitude inicial (H) = $0,133\ 332$; Profundidade (d) = $0,133\ 333$; Período (τ) = $2,506\ 628$.

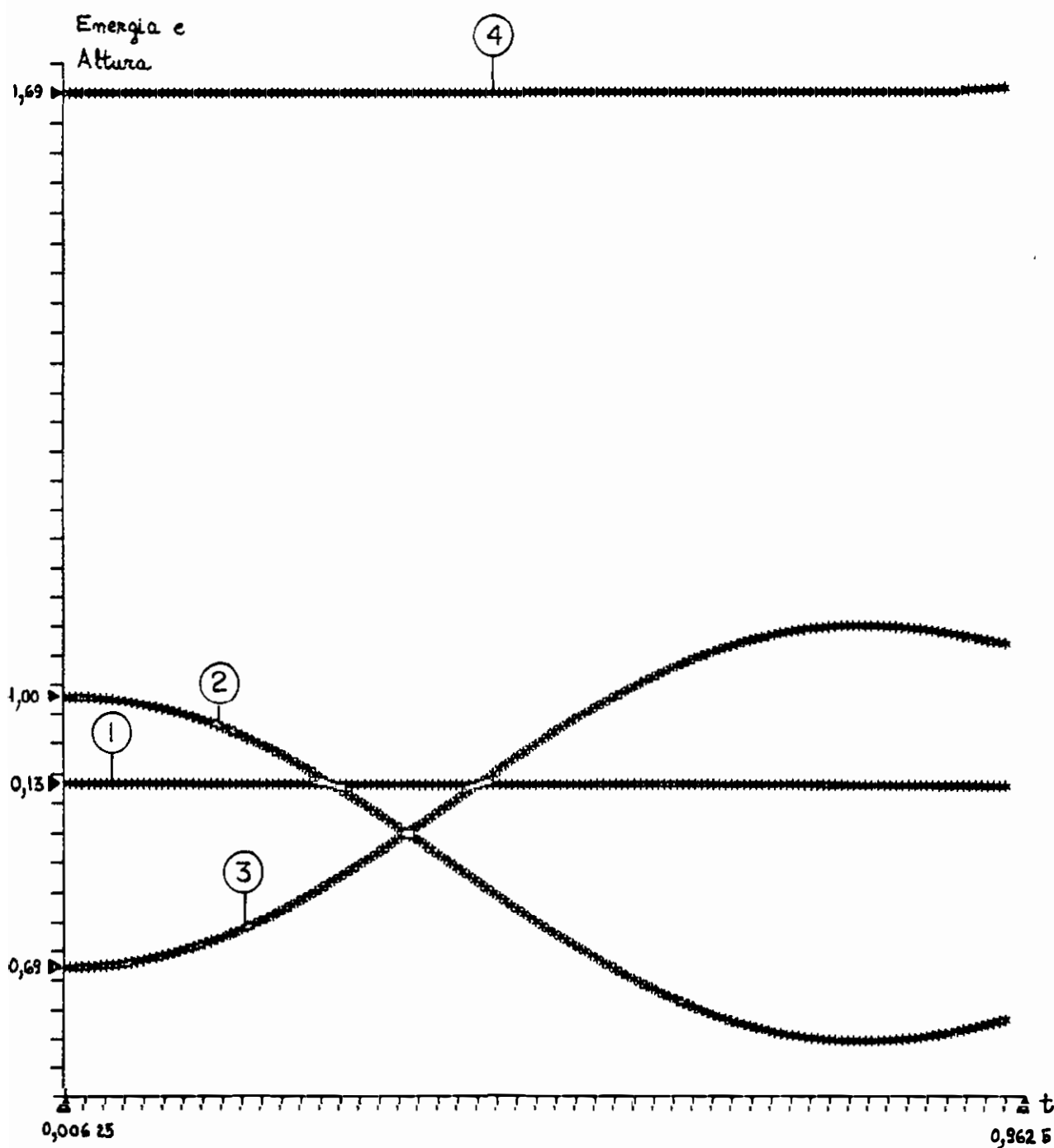


Figura 7.4.4.8 - Nível Médio da Água (1), Energia Potencial (2), Energia Cinética (3), Energia Total (4) referentes a evolução da superfície livre de uma ONDA REBENTANDO com $\Delta t = 0,006\ 250$ no período de tempo compreendido entre 0,1 e 0,9625 .

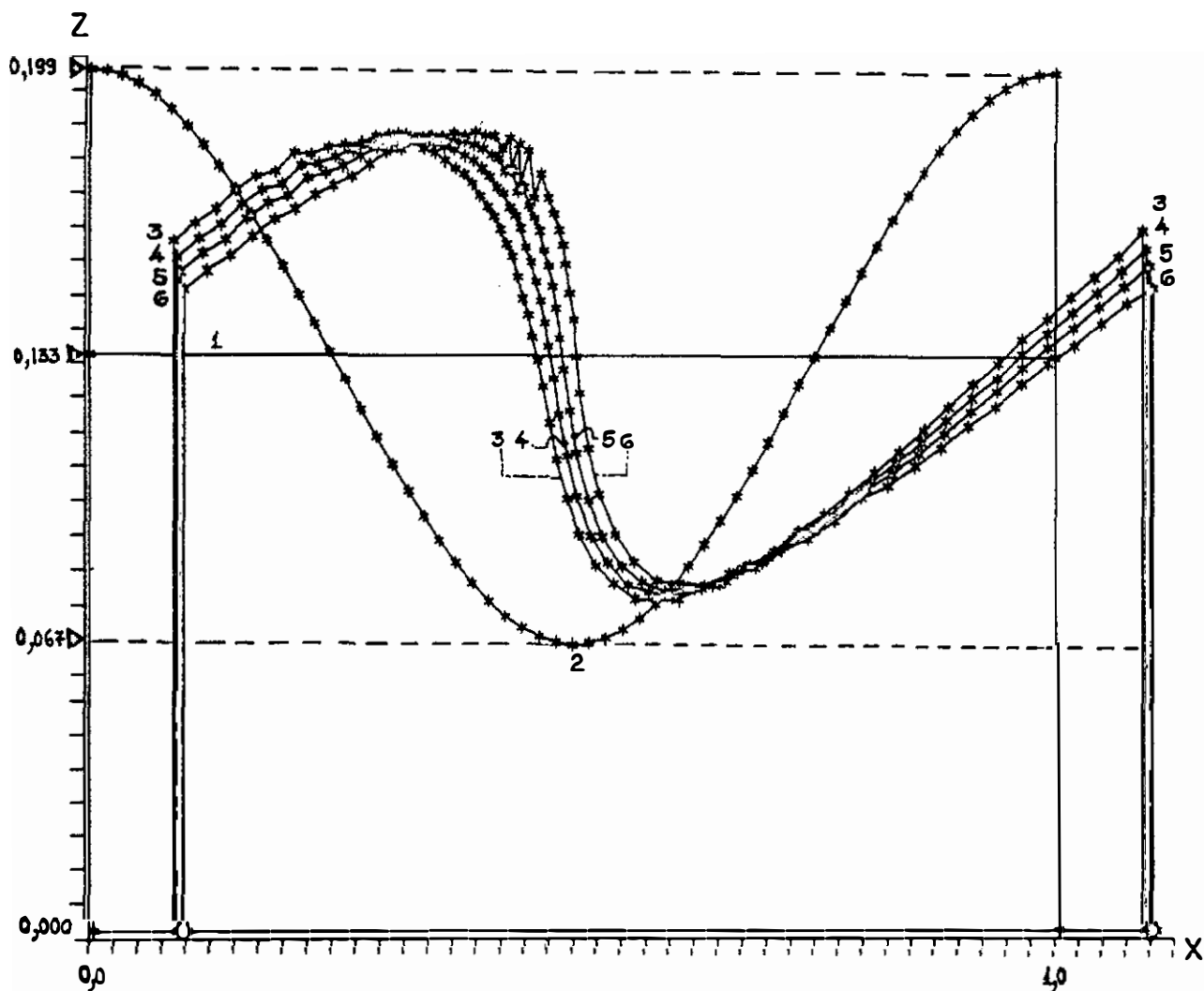


Figura 7.4.4.9 - Evolução da superfície livre de uma ONDA REBENTANDO para um $\Delta t = 0,0015625$. Tempo = t . Perfil da Superfície Livre = PSL. Legenda : (1) PSL em Repouso ; (2) Condição Geométrica Inicial ; (3) PSL no passo 397 ($t = 0,6203125$) ; (4) PSL no passo 423 ($t = 0,6609375$) ; (5) PSL no passo 448 ($t = 0,7$) ; (6) PSL no passo 478 ($t = 0,746875$). Amplitude inicial (H) = $0,133\ 332$; Profundidade (d) = $0,133\ 333$; Período (τ) = $2,506\ 628$.

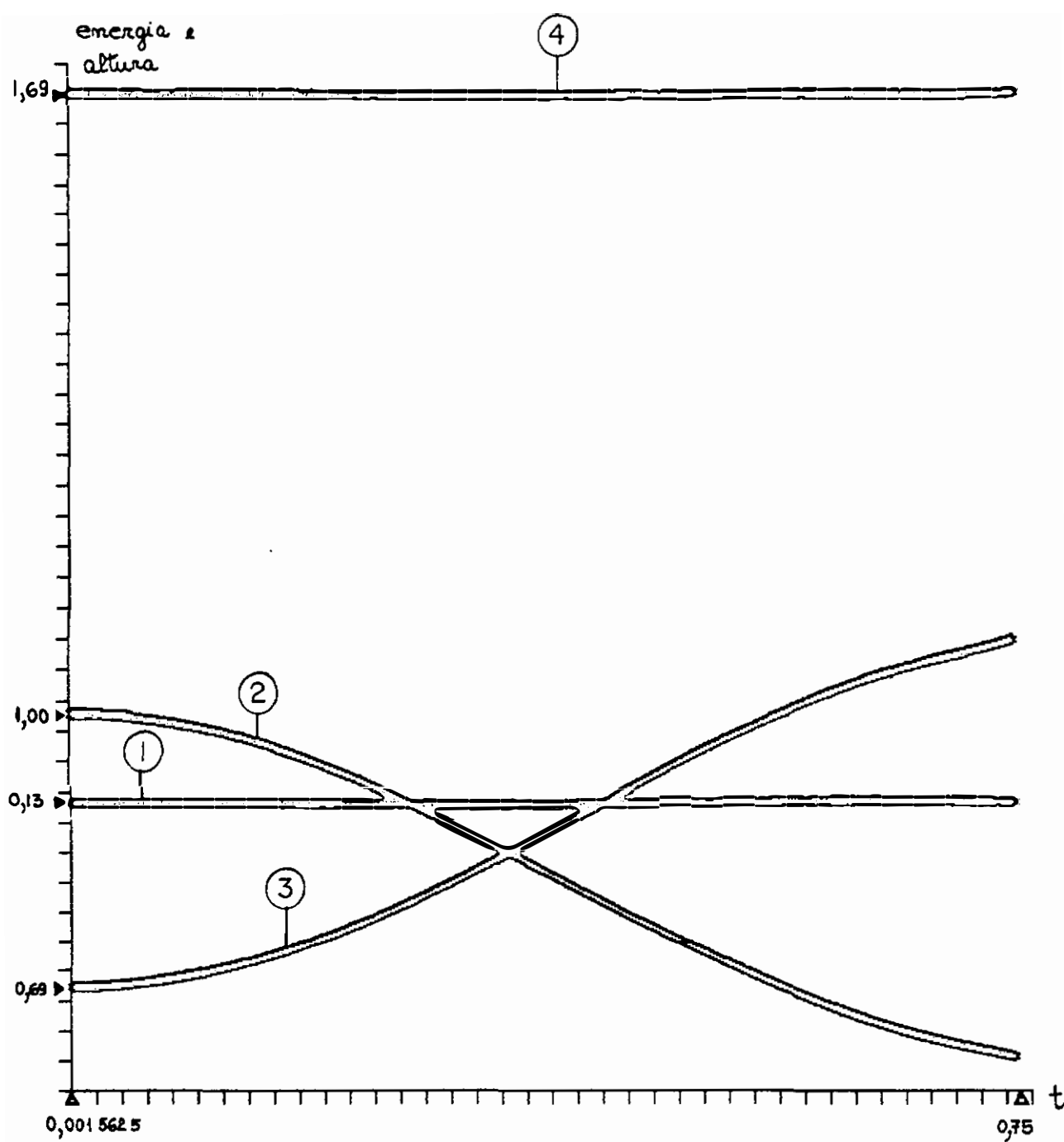


Figura 7.4.4.10 - Nível Médio da Água (1), Energia Potencial (2), Energia Cinética (3), Energia Total (4) referentes a evolução da superfície livre de uma ONDA REBENTANDO com $\Delta t = 0,0015625$ no período de tempo compreendido entre 0,1 e 0,746875 .

8. CONCLUSÕES

Conclusões

O presente modelo de elemento de contorno foi desenvolvido para calcular escoamento potencial bidimensional com superfície livre . A Equação de Bernoulli é aplicada na posição atual da superfície livre . A integral de contorno é encontrada, baseada na Segunda Identidade de Green e essa integral é resolvida numericamente pela discretização do contorno em elementos isoparamétricos quadráticos e pelo uso da Quadratura Gaussiana . Periodicidade pode ser usada quando há paredes verticais nos extremos anterior e posterior do domínio . A solução para a descontinuidade de velocidade em algum ponto do contorno foi encontrada usando elemento com colocação não nodal. Quando a velocidade normal no fundo é nula pode ser encontrada a solução discretizando somente as paredes laterais e a superfície livre. Usa-se então o processo de rebatimento do ponto fonte. A transformação cúbica de terceira ordem aplicada à coordenada local para a integração do elemento singular e quase-singular pode ser usada e sua atuação é excelente sobre os resultados obtidos. A centralização do nó do meio do elemento pode ser usada para corrigir possíveis descentralizações durante a integração no tempo . O Equilíbrio de Velocidade pode ser forçado através de uma equação adicional ao sistema. Quando assim for este deixa de ser considerado como medida de conservação de velocidade. Verificou-se que este procedimento não afetou os resultados substancialmente.

O modelo foi testado no cálculo de escoamento com fronteiras fixas (movimento permanente) e em fronteiras móveis (movimento transiente) . Bons resultados foram obtidos na progressão de uma onda linear e no cálculo do fluxo normal em fronteiras com cantos agudos (menor que 2 graus) . Foram testados exemplos de ondas levemente não lineares até altamente não lineares . Os resultados podem ser considerados satisfatórios . Também foi verificada a progressão de uma onda rebentando com diversos passos no tempo . Os resultados obtidos foram satisfatórios, princi-

palmente considerando que nenhum processo de suavização foi usado .

Foi implementado parcialmente no modelo a simulação de um Tanque Gerador de Ondas . Para melhorar o resultado da onda rebentando foi implementada uma função geradora de pontos com colocação não nodal no momento em que a onda está começando a formar canto e no local em que se espera este canto . Estes dois procedimentos não foram concluídos por falta de tempo .

Devido ao alto gasto de tempo computacional nos problemas transientes recomenda-se adicionar futuramente neste modelo um esquema de integração no tempo mais rápido.

O modelo em pauta está desenvolvido em módulos de modo que futuros pesquisadores o possam modificar ou implementar rotinas mais otimizadas .

-

9 APÊNDICES

APÊNDICE A - VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY

Quando se deseja integrar uma função " $f(x)$ " (ver figura (A.1)) em um intervalo $[a ; b]$, sendo " $f(x)$ " singular em " $x = x_1$ " , $x_1 \in [a ; b]$ tem-se o que se denomina uma integral imprópria.

O resultado " I " de uma integral imprópria pode ser calculado da seguinte forma

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{x_1 - \varepsilon} f(x) dx + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{x_1 + \Delta}^b f(x) dx \quad (A.1)$$

A existência de " I " implica na existência independente de

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{x_1 - \varepsilon} f(x) dx \quad (A.2)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{x_1 + \Delta}^b f(x) dx \quad (A.3)$$

Neste caso diz-se que " I " é convergente. Eventualmente pode ocorrer que " I " não seja convergente, neste caso :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{x_1 - \varepsilon} f(x) dx \rightarrow \infty \quad (A.4)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{x_1 + \Delta}^b f(x) dx \rightarrow \infty \quad (A.5)$$

porém o valor principal da integral obtido fazendo-se " $\varepsilon = \Delta$ " pode existir

$$VP(I) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{x_1 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_1 + \varepsilon}^b f(x) dx \right\} \quad (A.6)$$

Deve-se observar conforme mostrado na figura (2.5) que a porção excluída do domínio " Ω " foi um setor circu-

lar de raio " ε ", conseqüentemente " $\varepsilon = \Delta$ ", ou seja, os limites das integrais indicados nas equações (2.48) e (2.49) são realmente valores principais de Integral. Entretanto, pode-se observar que a integral mostrada na equação (2.50) é imprópria porém convergente e o integrando indicado na equação (2.51) não é singular. Neste caso ambas estas integrais podem ser feitas no sentido convencional, sendo que o resultado coincide com o valor principal das mesmas.

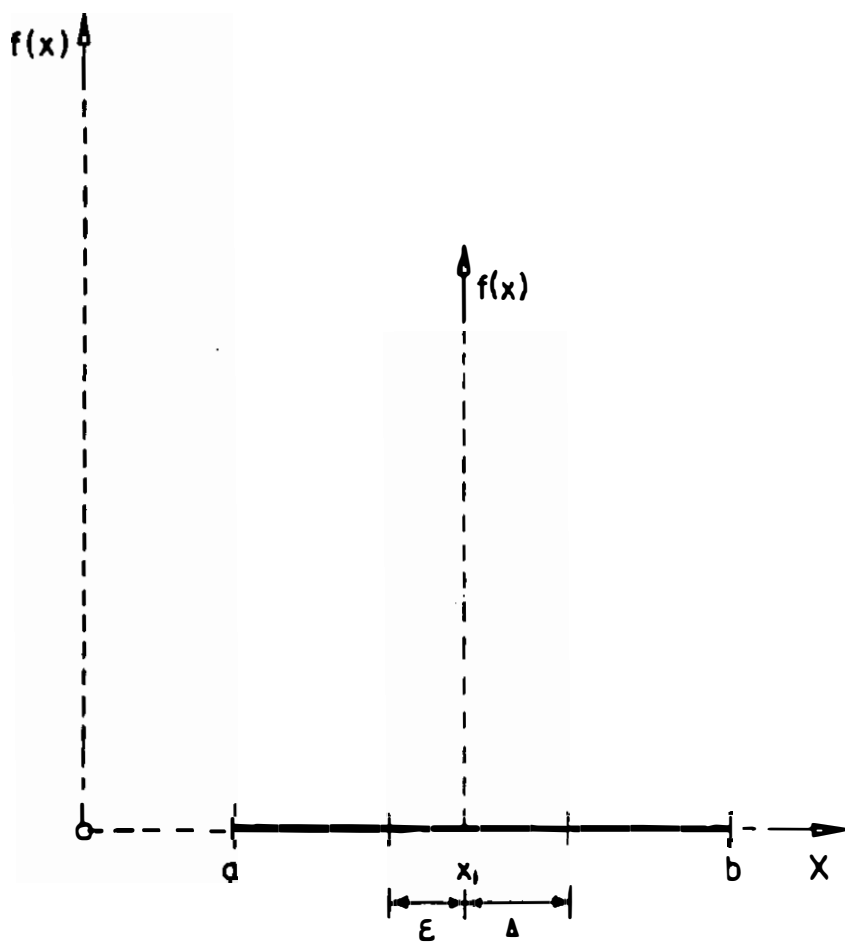


Figura A.1 – Definições relacionadas com integrais impróprios.

APÊNDICE B - POTENCIAL DE VELOCIDADES E VELOCIDADE EM PONTOS INTERNOS

A discussão apresentada no capítulo 2 concentrou-se no cálculo das incógnitas " u " e " p " no contorno. Em geral também é necessário que se obtenha o potencial de velocidades em pontos internos e as velocidades " p_x " e " p_z " em pontos internos e no contorno [19]. Como as incógnitas de contorno já foram obtidas, o valor do potencial de velocidades " u " em pontos selecionados " ξ " ($\xi \in \Omega$, $\xi \notin \Gamma$) pode ser obtido diretamente a partir da equação (2.80), com " $c_1 = 1$ ". Não é necessário neste caso resolver o sistema de equações, já que a única incógnita na equação (2.80) é " $u_1 = u(\xi_1)$ ". Os procedimentos de integração são os mesmos já discutidos, sendo que neste caso não ocorrem integrais singulares.

As velocidades

$$p_x(\xi) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\xi} \quad \text{e} \quad p_z(\xi) = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{\xi}$$

em pontos internos podem ser calculados a partir das equações integrais que resultam quando a equação (2.52) é derivada em relação as coordenadas " x_{ξ} " e " z_{ξ} " do ponto fonte. Neste caso

$$\begin{aligned} p_x &= \int_{\Gamma} p \left. \frac{\partial u^*}{\partial x} \right|_{\xi} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \left. \frac{\partial p^*}{\partial x} \right|_{\xi} d\Gamma \\ p_z &= \int_{\Gamma} p \left. \frac{\partial u^*}{\partial z} \right|_{\xi} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \left. \frac{\partial p^*}{\partial z} \right|_{\xi} d\Gamma \end{aligned} \quad (B.1)$$

A velocidade " p_t " na direção tangente ao contorno, pode ser determinada por um procedimento semelhante ao que

resultou nas equações (B.1), observando-se que neste caso a equação (2.52) teria que ser derivada em relação a coordenada na direção do vetor unitário tangente " \underline{t} " (ver figura 2.2). A equação integral assim obtida permite a determinação de " p_t " ; entretanto deve-se observar que neste caso, como o ponto fonte pertence a " Γ " , integrações singulares ocorrem, sendo a singularidade de ordem mais alta do que as de " u " e " p " . Tais integrais podem ser resolvidas sem dificuldade, entretanto podem ser evitadas, já que a velocidade na direção tangente ao contorno pode ser calculada derivando-se a expressão para o potencial de velocidades dada pela equação (2.57) :

$$p_t = \frac{\partial u}{\partial \Gamma} = \frac{\partial \eta}{\partial \Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{|J_{\Gamma/\eta}|} \sum_{i=1}^3 \frac{dN_i}{d\eta} u_i \quad (B.2)$$

Uma vez determinadas as componentes " p_n ($p_n = p$) " e " p_t " da velocidade nas direções normal e tangencial " p_x " e " p_z " são obtidos simplesmente por (ver figura 2.8) :

$$p_x = n_x p_n - n_x p_t \quad (B.3)$$

$$p_z = n_z p_n - n_z p_t$$

Em pontos nodais comuns a elementos diferentes, pode ocorrer descontinuidade de velocidade, que nem sempre corresponde a situação física que se deseja modelar. Neste caso deve-se adotar a média dos valores obtidos como o melhor valor para a velocidade.

10. BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

- [1] Telles, J. C. F. : "A Self Adaptive Co-ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 24, 959-973 (1987).
- [2] Brebbia, C.A. and Walker, S. : "Boundary Element Techniques in Engineering", Newnes-Butterworths, London (1980)
- [3] Wrobel, L. C. : Capítulo I - "Introdução aos Métodos Numéricos" da Edição "Métodos Numéricos em Recursos Hídricos" da ABRH, Rio de Janeiro (1989).
- [4] Azevedo, J.P.S. : Tese de Doutorado "Application of the Boundary Element Method to Two-dimensional Nonlinear Gravity Wave Problems", Southampton (1991).
- [5] Fabrício L. P. J. : Tese de Mestrado "Simulação Numérica para Análise de Ondas do Mar", Rio de Janeiro (1990).
- [6] C.A.Brebbia, J.C.F.Telles and L.C.Wrobel: "Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering", Springer-Verlag - Berlin - Heidelberg New York - Tokyo (1984).
- [7] Prodanoff, J. : Tese de Mestrado "Percolação em Barragens de Terra em Regime Permanente e Transiente com o Método dos Elementos de Contorno (1991).
- [8] Grilli, S.T. ; Skourup, J. e Svendsen, I.A. : "An Efficient Boundary Element Method for NonLinear Water Waves", Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.6, número 2 (1989).

- [9] Le Mehauté, Bernard : " An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves ", Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin (1976).
- [10] Fialho, G.O.M. e Sphaier, S.H. : "Determinação dos Campos de Velocidades e Acelerações devido à Onda do Mar, COOPE/UFRJ, Rio de Janeiro (1979).
- [11] New, A. L. ; McIver, P. and Peregrine, D. H. : "Computations of Overturning Waves". J.Fluid Mech. Vol.150,233-251 (1985).
- [12] Sugino, R. and Tosaka, N. : " Boundary Element Analysis of Unsteady Nonlinear Surface Wave on Water ", Nihon University, Narashino, Chiba, 275, Japan (1990).
- [13] Longuet-Higgins, M. S. and Cokelet, E. D. : " The Deformation of Steep Surface Waves on Water : I. A Numerical Method of Computation", Proc. R.Soc. London, A.350, 1-26 (1976).
- [14] Grilli, S.T.; Skourup, J. and Svendsen, I.A. : "The Modelling of Highly Nonlinear Waves : A Step Towards the Numerical Wave Tank". Invited paper in Proc. 10th Int. Conf. on Boundary Elements, Southampton, (ed. C.A.Brebbia) Vol.1, 549-564, Computational Mechanics Publications, Southampton and Springer-Verlag, Berlin (1988).
- [15] de Paula, Fernando Amorim: Tese de Doutorado " Elementos de Contorno com Equilíbrio - Uma Formulação Consistente para Problemas de Potencial e Elasticidade [Rio de Janeiro] (1991) .
- [16] Vinje, T. and Brevig, P. : "Numerical Simulation of Breaking Waves ", Adv. Water Resources Vol.4, 77-82

(1981) .

- [17] Jansen, P. C. M. : " A Boundary Element Model for Non-Linear Free Surface Phenomena ", Communications on Hydraulic and Geotechnical Engineering, Delft University of Technology, Department of Civil Engineering, ISSN 0169 6548 (1986).

- [18] Dold, J. W. and Peregrine, D. H. : " Steep Unsteady Water Waves : An Efficient Computational Scheme ", Proc. of the 19th Coastal Engineering Conf. , Vol.1, Houston, ASCE, 955-967 (1984) .

- [19] Mansur W.J. e Prodanoff J.H.A., Capítulo " Método dos Elementos de Contorno em Recursos Hídricos", Livro " Métodos Numéricos em Recursos Hídricos II", Editora ABRH, 1992 (a ser publicado).

- [20] Marques E. Mansur W.J., Coupling of Boundary and Finite Element Methods: Applications to Potential Problems, Anais da Conferência MECOM VIII, 3 a 5 Nov1987, Rio de Janeiro, RJ.